

## Zur Diracschen Theorie des Elektrons

### I. Algebraische Identitäten zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten

Von W. Kofink

In der Diracschen Theorie des Elektrons wird den inneren Produkten  $(\psi^+, \Gamma^A \psi)$  der 16 Cliffordschen Zahlen  $\Gamma^A$ :  $(I, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5, \gamma^{[23]}, \gamma^{[31]}, \gamma^{[12]}, \gamma^{[14]}, \gamma^{[24]}, \gamma^{[34]}, \gamma^{[234]}, \gamma^{[314]}, \gamma^{[124]}, \gamma^{[123]})$  mit einer Wellenfunktion  $\psi$  und deren Adjungierten  $\psi^+$  eine bestimmte physikalische Bedeutung zuerkannt. Zwischen diesen inneren Produkten bestehen Beziehungen, die teils aus der Diracgleichung, teils aber schon aus der Algebra des gewählten Zahlensystems entspringen. Es ist daher sinnvoll, eine systematische Untersuchung der Folgen der Algebra des Cliffordschen Zahlensystems für die Diracsche Theorie vorzunehmen und sie von denen der Bewegungsgleichung zu trennen, obwohl die Wahl des neuen Zahlensystems eng mit der Diracgleichung verknüpft und bekanntlich keine willkürliche ist. Man wird dabei erkennen, daß manche Beziehung, welche man als Folge des relativistischen Charakters der Diracgleichung anzusprechen geneigt wäre, schon eine reine Folge des gewählten neuen Zahlenbereichs ist. In Teil I werden diese Beziehungen zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten (der Ladung, des Stromes, des elektrischen und magnetischen Moments usw.) aufgestellt. Sie sind *algebraische Identitäten*, die unabhängig von der Wahl des Feldes, in welchem das Elektron sich bewegt, immer gelten und die sich ohne jede Spezialisierung der Diracmatrizen — selbst Hermiteizität ist nicht erforderlich — ableiten lassen.

Außer diesen algebraischen Identitäten gibt es noch weitere feldunabhängige Beziehungen zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten. Sie bestehen auf Grund der Tatsache, daß die elektromagnetischen Potentiale, mit denen äußere Felder in die Diracsche Gleichung eingehen, *reell* sind, während die Wellengleichung im übrigen *komplex* ist. Diese Beziehungen haben die Form von Differentialgleichungen, sie werden in Teil III unter der Bezeichnung „*Realitätsrelationen*“ abgeleitet. Man findet 6 vektorielle und 4 skalare Relationen dieses Typs in III § 2. Die 6 vektoriellen Relationen lassen sich auf die 4 skalaren zurückführen, wie in Teil IV gezeigt wird.

Die Umwandlung der Realitätsrelationen aus der primitiven Form, in der man sie zunächst (III § 1) gewinnt und in der sie undeutbare Größen enthalten, in *Vektorschreibweise*, erfordert nochmalige Ausnützung der Algebra der Diracmatrizen. Daher findet man in Teil II die Aufstellung algebraischer Beziehungen zwischen Größen, die zu den Wahrscheinlichkeitsdichten des Teiles I analog sind, sich aber durch das Auftreten eines Differentialquotienten in ihnen („vordere“ bzw. „hintere“ Differentiation) von jenen unterscheiden. Teil II bringt damit eine wesentliche Erweiterung des Formelschatzes über den des ersten Teils hinaus und enthält die notwendigen mathematischen Hilfsmittel, um in III die Elimination aller undeutbaren Größen aus den Realitätsrelationen vorzunehmen.

#### Einleitung und Zusammenfassung zu I

In Teil I werden die Ergebnisse einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> vervollständigt. Nach Pauli<sup>2)</sup> bestehen zwischen den Matrixelementen der Diracmatrizen bilineare Gleichungen. In § 2 werden diese Gleichungen auf eine möglichst einfache und für die nachfolgenden Anwendungen zweckmäßige Form gebracht [§ 2 Gl. (4) und (10)]. Die Paulischen Bilineargleichungen lassen sich benützen, um durch Multiplikation jedes Faktors mit den 16 Matrizen des Diracschen Matrixringes und Bilden innerer Produkte  $16 \cdot 16 = 256$  bilineare Beziehungen zwischen den 16 Wahrscheinlichkeitsdichten der Diracschen Theorie zu erhalten. Unter den 256 Beziehungen kommen viele mehrfach vor, und die immerhin noch beträchtliche Anzahl verschiedener Beziehungen läßt sich auf 9 primäre zurückführen, aus denen man alle übrigen ableiten kann. Wir bezeichnen diese Beziehungen als „algebraische Identitäten“ ihrer Herkunft entsprechend und unterscheiden sie damit systematisch von den in Teil III abgeleiteten „Realitätsrelationen“. § 3 enthält eine Liste dieser primären und abgeleiteten algebraischen Identitäten. Sie sind wie die Paulischen Gleichungen ebenfalls mindestens von bilinearer Bauart. Die hauptsächlichste Ergänzung, die I zu der oben erwähnten früheren Arbeit liefert, ist der Nachweis, daß es nicht mehr als 9 primäre Identitäten geben kann (§ 4). Außerdem wird hier der Grund für das Vorhandensein dieser Identitäten deutlich, der einfacher Natur, nämlich im Bildungsgesetz innerer Produkte zu suchen ist. Algebraische Identitäten zwischen den 16 inneren Produkten müssen danach in jedem Ring linear unabhängiger Matrizen bestehen, aber die besondere Form unserer Identitäten [§ 3 Gl. (15)–(19)] folgt nach Pauli aus der Antikommutativität der Diracmatrizen und ist nicht so einfacher Natur. An einem Spezial-

beispi  
Urspr  
übrige  
ziell  
die ü  
Identi  
später  
geome  
titäten

D  
erschien  
neue B  
gebrauch

A  
a)  
b)  
sehen E  
(1)  
c)

sämtlich  
sehen d  
B.

(2)  
erhält m  
(3)

Wi

sämtliche  
derart, d  
Au

durch M  
 $\psi = (\psi_1, \dots)$   
Matrizen  
Massen

beispiel (§ 5) verfolgen wir die Wirksamkeit des in § 4 gefundenen Ursprungs der Identitäten. Während für die Ableitungen aller übrigen Paragraphen weder die Hermiteizität noch irgendeine spezielle Form von Diracmatrizen erforderlich ist, verwenden wir in § 5 die übliche spezielle Darstellung der  $\alpha$ -Matrizen zur Ableitung der Identitäten. § 6 bringt noch einige bemerkenswerte Formeln, die später (Teil II—IV) zur Anwendung gelangen und § 7 enthält eine geometrische Darstellung bzw. physikalische Deutung einiger Identitäten.

### § 1. Bezeichnungen

Die hier verwendeten Bezeichnungen sind dieselben, wie in der früher erschienenen Veröffentlichung<sup>1)</sup>. Es treten jedoch von nun ab noch einige neue Bezeichnungen auf, so daß es am vernünftigsten erscheint, die früher gebrauchten im Zusammenhang mit den neuen zu wiederholen.

A. Es bedeuten ( $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ )

a)  $I$  die 4reihige Einheitsmatrix;

b)  $\gamma^\mu = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4)$  4 antikommutative Grundmatrizen, welche die Diracschen Beziehungen befriedigen:

$$(1) \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta_{\mu\nu} \cdot I;$$

$$c) \quad \gamma^{[\mu\nu]} = (i\gamma^2\gamma^3, i\gamma^3\gamma^1, i\gamma^1\gamma^2, i\gamma^1\gamma^4, i\gamma^2\gamma^4, i\gamma^3\gamma^4),$$

$$\gamma^{[\lambda\mu\nu]} = (i\gamma^2\gamma^3\gamma^4, i\gamma^3\gamma^1\gamma^4, i\gamma^1\gamma^2\gamma^4, i\gamma^1\gamma^2\gamma^3),$$

$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$$

sämtliche linear unabhängigen Produkte aus den  $\gamma^\mu$  mit einem Faktor versehen derart, daß ihr Quadrat die Einheitsmatrix ist.

B. Ein zweites System Diracscher Matrizen  $\alpha^\mu$ , die antikommutieren

$$(2) \quad \alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu = 2\delta_{\mu\nu} \cdot I,$$

erhält man mit Hilfe der Substitution ( $k = 1, 2, 3$ )

$$(3) \quad \alpha^k = -i\gamma^4\gamma^k, \quad \alpha^4 = \gamma^4 \quad (\gamma^k = i\alpha^4\alpha^k, \gamma^4 = \alpha^4).$$

Wiederum bezeichnen ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ )

$$\alpha^{[\mu\nu]} = (i\alpha^2\alpha^3, i\alpha^3\alpha^1, i\alpha^1\alpha^2, i\alpha^1\alpha^4, i\alpha^2\alpha^4, i\alpha^3\alpha^4),$$

$$\alpha^{[\lambda\mu\nu]} = (i\alpha^2\alpha^3\alpha^4, i\alpha^3\alpha^1\alpha^4, i\alpha^1\alpha^2\alpha^4, i\alpha^1\alpha^2\alpha^3),$$

$$\alpha^5 = (\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4)$$

sämtliche linear unabhängigen Produkte aus den  $\alpha^\mu$ , versehen mit Faktoren derart, daß ihr Quadrat die Einheitsmatrix ist.

Aus einem Matrixoperator  $O$  entsteht eine Bilinearform

$$(\Phi, O\psi) = \sum_{\varrho, \sigma=1}^4 \Phi_\varrho O_{\varrho\sigma} \psi_\sigma$$

durch Multiplikation mit 2 Funktionensystemen  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$  und  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ . Es ist üblich, das in der Diracgleichung verwendete Matrixensystem  $\gamma^\mu$  oder  $\alpha^\mu$  zu nennen, je nachdem die Einheitsmatrix beim Massenglied oder bei der zeitlichen Differentiation steht. Gewisse aus ihnen

gebildete Bilinearformen zeigen dann ein bestimmtes Verhalten gegen Lorentztransformation. Diese Bilinearformen, denen die Bedeutung von Wahrscheinlichkeitsdichten zukommt, sind

a) zwei Invarianten

$$\mathcal{Q} = (\psi^*, \alpha^4 \psi) = -i(\psi^+, \psi) \quad (\text{Dichte der Ruhmasse}),$$

$$\mathcal{Q}' = -(\psi^*, \alpha^5 \psi) = i(\psi^+, \gamma^5 \psi),$$

b) ein Vierervektor (Ladungs- und Stromdichte)

$$s_0 = (\psi^*, \psi) = -i(\psi^+, \gamma^4 \psi),$$

$$s_k = -(\psi^*, \alpha^k \psi) = (\psi^+, \gamma^k \psi) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Die räumlichen Komponenten fassen wir im Stromdichtevektor  $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$  zusammen,

c) ein schiefssymmetrischer Tensor

$$M_{ik} = (\psi^*, \alpha^{[ik]} \psi) = -i(\psi^+, \gamma^{[ik]} \psi),$$

$$M_{k0} = (\psi^*, \alpha^{[k4]} \psi) = -(\psi^+, \gamma^{[k4]} \psi).$$

Die Komponenten dieses Sechservektors fassen wir im folgenden in zwei gewöhnliche Vektoren zusammen, den Vektor

$$\mathfrak{M} = (M_{23}, M_{31}, M_{12}) \quad (\text{Dichte des magnetischen Moments})$$

und den dazu dualen Vektor

$$\hat{\mathfrak{M}} = (M_{10}, M_{20}, M_{30}) \quad (\text{Dichte des elektrischen Moments});$$

d) ein Raumvektor (ein in allen drei Indizes  $i, \mu, \nu$  schiefssymmetrischer Tensor 3. Ranges)  $l = k + 1, m = k + 2, \text{ mod. } 3$

$$\hat{s}_0 = -(\psi^*, \alpha^{[123]} \psi) = (\psi^+, \gamma^{[123]} \psi),$$

$$\hat{s}_k = (\psi^*, \alpha^{[l m]} \psi) = -i(\psi^+, \gamma^{[l m k]} \psi).$$

Seine 3 räumlichen Komponenten fassen wir in dem zum Stromvektor dualen Vektor

$$\hat{\vec{s}} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3) \quad (\text{Spindichte})$$

zusammen.  $\psi^*$  ist das Konjugiert-Komplexe von  $\psi$ , während  $\psi^+ = i\psi^* \gamma^4$  die Adjungierte zu  $\psi$  bedeutet. Das Dualitätszeichen  $^{\wedge}$  bezeichnet Dualität im relativistischen Sinne, vgl. a. a. O.<sup>2)</sup> Die angegebenen Bilinearformen müssen noch mit den dimensionellen Faktoren  $m, -e, -\frac{e\hbar}{2mc}, \frac{\hbar}{2}$  multipliziert werden, damit sie den beigelegten Deutungen entsprechen, vgl. a. a. O.<sup>1)</sup> § 1 C. Sie werden im folgenden der Kürze halber weggelassen.

C. Außer den bisher erwähnten inneren Produkten wird es in II-IV notwendig werden, innere Produkte einzuführen, die Differentialquotienten enthalten. Das Auftreten eines Differentialquotienten nach  $x_\mu$  an erster Stelle in einem inneren Produkt soll der Kürze halber mit „vorderer Differentiation“ benannt und durch einen oberen, vorderen Index  $\mu$  bezeichnet werden, sein Auftreten an letzter Stelle soll mit „hinterer Differentiation“ benannt und durch einen oberen, hinteren Index  $\mu$  bezeichnet werden. Diese Bezeichnungsweise erläutern folgende Beispiele:



$${}^{\mu}\Omega = \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\mu}}, \alpha^4 \psi \right) = -i \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_{\mu}}, \psi \right) = \sum_{\varrho, \sigma=1}^4 \frac{\partial \psi_{\varrho}^*}{\partial x_{\mu}} \alpha_{\varrho\sigma}^4 \psi_{\sigma} \quad (\text{vordere Diff.})$$

$$\Omega^{\mu} = \left( \psi^*, \alpha^4 \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right) = -i \left( \psi^+, \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right) = \sum_{\varrho, \sigma=1}^4 \psi_{\varrho}^* \alpha_{\varrho\sigma}^4 \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \quad (\text{hintere Diff.})$$

Die Vektorschreibweise

$$\mu_{\hat{3}}, \mu_{\hat{5}}, \mu_{\hat{M}}, \mu_{\hat{N}} \quad (\text{vordere Diff.}), \quad \hat{s}^{\mu}, \hat{e}^{\mu}, \hat{M}^{\mu}, \hat{N}^{\mu} \quad (\text{hintere Diff.})$$

möge eine zusammenfassende Schreibweise für jeweils 3 vorn bzw. hinten nach  $x_{\mu}$  differenzierte Komponenten bedeuten. Der Gebrauch dieser Bezeichnungen im Falle anderer Operatoren im inneren Produkt erfolgt analog zu diesen Beispielen. Die Summe von vorderer und hinterer Differentiation entspricht dem Differentialquotienten eines inneren Produkts, z. B.

$${}^{\mu}M_{23} + M_{23}^{\mu} = \frac{\partial M_{23}}{\partial x_{\mu}},$$

während der Differenz z. B.  $({}^{\mu}M_{23} - M_{23}^{\mu})$  keine einfache Bedeutung zukommt. Solche Differenzen werden im Laufe dieser Untersuchung als „undeutbare“ Größen (Teil III) vielfach auftreten; es ist Aufgabe des II. Teiles, die mathematischen Hilfsmittel zur Elimination dieser Größen vorzubereiten.

## § 2. Die Paulischen Bilineargleichungen in anderer Form

Ohne die Diracschen Matrizen in einer speziellen Darstellung zu schreiben, folgt allein aus der Antikommutativität der 4 Grundmatrizen  $\gamma^{\mu}$  für die Matrixelemente des auf diesen Grundmatrizen aufgebauten Matrixrings die Bilineargleichung

$$(4) \quad \sum_{k=1}^3 \gamma_{\varrho\sigma}^k \gamma_{\varrho'\sigma'}^k = \gamma_{\varrho\sigma}^{[123]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[123]} - \gamma_{\varrho\sigma}^{[123]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[123]} + \delta_{\varrho\sigma} \delta_{\varrho'\sigma'} - \gamma_{\varrho\sigma}^5 \gamma_{\varrho'\sigma'}^5 - \gamma_{\varrho\sigma}^4 \gamma_{\varrho'\sigma'}^4.$$

Diese Gleichung umfaßt in ihrem Anwendungsbereich die beiden Gl. (20) und (21) von Pauli, a. a. O. 7). Ersetzt man nämlich in ihr [Gl. (4) oben] z. B.  $\varrho$  durch  $\bar{\varrho}$  und  $\varrho'$  durch  $\bar{\varrho}'$ , multipliziert mit  $\gamma_{\varrho\bar{\varrho}'}^{[123]} \gamma_{\varrho'\bar{\varrho}}^{[123]}$  und summiert über  $\bar{\varrho}, \bar{\varrho}'$ , so erhält man

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\varrho\sigma}^{[23]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[23]} + \gamma_{\varrho\sigma}^{[31]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[31]} + \gamma_{\varrho\sigma}^{[12]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[12]} \\ = \delta_{\varrho\sigma} \delta_{\varrho'\sigma'} - \delta_{\varrho\sigma} \delta_{\varrho'\sigma'} + \gamma_{\varrho\sigma}^4 \gamma_{\varrho'\sigma'}^4 + \gamma_{\varrho\sigma}^5 \gamma_{\varrho'\sigma'}^5 + \gamma_{\varrho\sigma}^{[123]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[123]}. \end{array} \right.$$

Multipliziert man mit  $\gamma_{\varrho\bar{\varrho}}^4 \gamma_{\varrho'\bar{\varrho}'}^4$  und summiert wieder über  $\bar{\varrho}, \bar{\varrho}'$ , so erhält man

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\varrho\sigma}^{[14]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[14]} + \gamma_{\varrho\sigma}^{[24]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[24]} + \gamma_{\varrho\sigma}^{[34]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[34]} \\ = \gamma_{\varrho\sigma}^5 \gamma_{\varrho'\sigma'}^5 - \gamma_{\varrho\sigma}^5 \gamma_{\varrho'\sigma'}^5 + \delta_{\varrho\sigma} \delta_{\varrho'\sigma'} - \gamma_{\varrho\sigma}^4 \gamma_{\varrho'\sigma'}^4 - \gamma_{\varrho\sigma}^{[123]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[123]}. \end{array} \right.$$

Addition von (5) und (6) ergibt [Gl. (20) von Pauli 2) = Gl. (α) der Veröff. 1)]:

$$(7) \quad \sum_{[\mu\nu]} \gamma_{\varrho\sigma}^{[\mu\nu]} \gamma_{\varrho'\sigma'}^{[\mu\nu]} = 2(\delta_{\varrho\sigma} \delta_{\varrho'\sigma'} + \gamma_{\varrho\sigma}^5 \gamma_{\varrho'\sigma'}^5) - \delta_{\varrho\sigma} \delta_{\varrho'\sigma'} - \gamma_{\varrho\sigma}^5 \gamma_{\varrho'\sigma'}^5.$$

Wird jedoch in (4)  $q$  durch  $\bar{q}$ ,  $\bar{q}$  durch  $\bar{\bar{q}}$  ersetzt, mit  $\gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}}$  multipliziert und über  $\bar{q}$ ,  $\bar{\bar{q}}$  summiert, so entsteht

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[234]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[214]} + \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[314]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[314]} + \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[124]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[124]} \\ & = \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4 \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4 - \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4 \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4 + \delta_{\bar{q}\bar{q}} \delta_{\bar{q}\bar{q}} - \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}} - \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]} \end{aligned} \right.$$

Durch Addition dieser Gleichung zu Gl. (4) erhält man [Gl. (21) von Pauli<sup>2)</sup> = der Summe der Gl. ( $\beta$ ) und ( $\gamma$ ) der Veröffentlichung<sup>1)</sup>]:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\mu} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\mu} + \sum_{[\lambda\mu\nu]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[\lambda\mu\nu]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[\lambda\mu\nu]} = 2(\delta_{\bar{q}\bar{q}} \delta_{\bar{q}\bar{q}} - \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}}) \end{aligned} \right.$$

Umgekehrt ist (4) auch Folge der Gl. (20) und (21) von Pauli<sup>2)</sup>. Ersetzt man nämlich in (7) den Index  $q$  durch  $\bar{q}$ , den Index  $\bar{q}$  durch  $\bar{\bar{q}}$ , multipliziert mit  $\gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]}$ , summiert über  $\bar{q}$ ,  $\bar{\bar{q}}$  und addiert (9), so entsteht (4).

Nimmt man noch zu Gl. (4) die zweite Gleichung

$$(10) \quad \boxed{2B_{\bar{q}\bar{q}} B_{\bar{q}\bar{q}}^{-1} = (\delta_{\bar{q}\bar{q}} \delta_{\bar{q}\bar{q}} - \delta_{\bar{q}\bar{q}} \delta_{\bar{q}\bar{q}}) + (\gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}} - \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{\bar{5}}) + (\gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4 \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4 - \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4 \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^4) - (\gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]} - \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]} \gamma_{\bar{q}\bar{q}}^{[123]})}$$

hinzu, so hat man die Paulischen Bilineargleichungen in der für die folgenden Anwendungen passendsten Form. Die Matrix  $B$  ist diejenige Matrix<sup>2)</sup>, welche das System der transponierten Matrizen  $\gamma^{\mu}$  (Vertauschung von Zeilen und Spalten) durch Ähnlichkeitstransformation aus dem System der  $\gamma^{\mu}$  hervorgehen läßt:

$$(11) \quad \overline{\gamma^{\mu}} = B \gamma^{\mu} B^{-1}.$$

Die Matrix  $B$  ist schief-symmetrisch

$$(12) \quad B = -B.$$

Aus (11) und (12) folgt, daß mit  $B$  auch die Matrizen  $B\gamma^{\mu}$  schief-symmetrisch sind:

$$(13) \quad (\overline{B\gamma^{\mu}}) = -B\gamma^{\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5),$$

während die Matrizen  $B\gamma^{[\mu\nu]}$  und  $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$  10 symmetrische Matrizen sind:

$$(14) \quad (\overline{B\gamma^{[\mu\nu]}}) = B\gamma^{[\mu\nu]}, \quad (\overline{B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}}) = B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}.$$

Daß (10) gleichbedeutend mit der Gl. (34) in Paulis Arbeit ist, erkennt man, indem man die Differenz von Gl. (4) und (10) bildet. Die Formulierung (4) und (10) hat den Vorteil, in 2 Gleichungen ebensoviel auszusagen, wie bisher in 3 [a. a. O.<sup>1)</sup> Gl. ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ )].

### § 3. Die algebraischen Identitäten zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten

Durch Multiplikation der Bilineargleichung (4) mit passenden Matrizen aus dem Matrixring und Bildung innerer Produkte mit Hilfe der Funktionen  $\psi^+$  und  $\psi$  erhält man eine Reihe algebraischer

Identitäten zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten. Sie lassen sich alle ableiten aus 9 primären Identitäten, deren Herleitung man in <sup>1)</sup> findet. Hermiteizität der  $\gamma^\mu$  ist dabei nicht erforderlich.

Primäre algebraische Identitäten\*):

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & (\bar{s}, \bar{s}) = s_0^2 - (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2), \\
 (16) \quad & (\hat{s}, \hat{s}) = \dot{s}_0^2 + (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2), \\
 (17) \quad & (\bar{s}, \hat{s}) = s_0 \dot{s}_0, \\
 (18) \quad & \mathfrak{M} = \frac{\Omega (s_0 \hat{s} - \dot{s}_0 \bar{s}) - \hat{\Omega} [\bar{s}, \hat{s}]}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2}, \\
 (19) \quad & \mathfrak{M} = \frac{\Omega [\bar{s}, \hat{s}] + \hat{\Omega} (s_0 \hat{s} - \dot{s}_0 \bar{s})}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2}.
 \end{aligned}$$

Das magnetische und elektrische Moment läßt sich danach ganz auf die übrigen Größen  $s_0, \dot{s}_0, \bar{s}, \hat{s}, \Omega, \hat{\Omega}$  zurückführen [Gl. (18) und (19)], und diese sind selbst noch durch 3 Identitäten miteinander verbunden. Nach dieser Auffassung wären  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}$  aus den übrigen Größen ableitbar, und aus (15)–(17) könnte man z. B. bei Vorgabe von  $\bar{s}, \hat{s}, \Omega$  auch noch die Größen  $s_0, \dot{s}_0, \hat{\Omega}$  bis auf einige freibleibende Vorzeichen berechnen. Man erhält dabei

$$\begin{aligned}
 s_0 &= \pm \frac{1}{2} \{ (\bar{s} + \hat{s}) \pm |(\bar{s} - \hat{s})| \}, \quad \dot{s}_0 = \pm \frac{1}{2} \{ |(\bar{s} + \hat{s})| \mp |(\bar{s} - \hat{s})| \}, \\
 \hat{\Omega} &= \pm \left[ \frac{1}{2} \{ |\hat{s}|^2 - |\bar{s}|^2 - 2\Omega^2 + \sqrt{(|\bar{s}|^2 + |\hat{s}|^2)^2 - 4(\bar{s}, \hat{s})^2} \} \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Jede der 4 Möglichkeiten, die Vorzeichen in  $s_0$  zu wählen, ergibt eine Lösung, wenn man die entsprechenden in  $\dot{s}_0$  wählt. Bis auf diese Unsicherheit der Vorzeichen sind also die 9 Größen  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, s_0, \dot{s}_0, \hat{\Omega}$  aus den 7 Größen  $\bar{s}, \hat{s}, \Omega$  mit Hilfe unserer primären Identitäten berechenbar.

#### Abgeleitete algebraische Identitäten

Die oben vorgenommene Auszeichnung der Gl. (15)–(19) als primäre ist nicht die einzig mögliche. Man könnte mit gleichem Recht ein anderes System von Gleichungen als primär auszeichnen, aus welchen die übrigen ableitbar sind, z. B.

$$(20) \quad (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = s_0^2 - \dot{s}_0^2 - \hat{\Omega}^2,$$

$$(21) \quad (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = s_0^2 - \dot{s}_0^2 - \Omega^2,$$

<sup>\*)</sup> Druckfehlerberichtigung: In a. a. O. <sup>1)</sup> S. 98 fehlt in Formel (II) und (IV) je ein Dualitätszeichen. Die richtige Schreibweise findet sich dort auf S. 96.

$$(22) \quad (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = \Omega \hat{\Omega},$$

$$(23) \quad \bar{s} = \frac{s_0 [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] + \hat{s}_0 (\Omega \mathfrak{M} + \hat{\Omega} \mathfrak{M})}{s_0^2 - \hat{s}_0^2},$$

$$(24) \quad \hat{s} = \frac{\hat{s}_0 [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] + s_0 (\Omega \mathfrak{M} + \hat{\Omega} \mathfrak{M})}{s_0^2 - \hat{s}_0^2}.$$

In diesem System sind Strom- und Spindichte ganz auf die übrigen Größen  $s_0, \hat{s}_0, \Omega, \hat{\Omega}, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}$  zurückgeführt. Hier sollen aber die Gl. (15) bis (19) als die primären gelten, die Gl. (20)–(24) gehören dann zu den aus (15)–(19) ableitbaren Identitäten. Wir zählen weitere abgeleitete auf:

$$(25) \quad (\mathfrak{M}, \bar{s}) = s_0 \Omega, \quad (29) \quad [\mathfrak{M}, \bar{s}] = \hat{\Omega} \hat{s} - s_0 \mathfrak{M},$$

$$(26) \quad (\mathfrak{M}, \hat{s}) = s_0 \Omega, \quad (30) \quad [\mathfrak{M}, \hat{s}] = \hat{\Omega} \bar{s} - \hat{s}_0 \mathfrak{M},$$

$$(27) \quad (\mathfrak{M}, \bar{s}) = \hat{s}_0 \hat{\Omega}, \quad (31) \quad [\mathfrak{M}, \bar{s}] = -\Omega \hat{s} + s_0 \mathfrak{M},$$

$$(28) \quad (\mathfrak{M}, \hat{s}) = s_0 \hat{\Omega}, \quad (32) \quad [\mathfrak{M}, \hat{s}] = -\Omega \bar{s} + \hat{s}_0 \mathfrak{M},$$

$$(33) \quad [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] = s_0 \bar{s} - \hat{s}_0 \hat{s},$$

$$(34) \quad [\bar{s}, \hat{s}] = \Omega \mathfrak{M} - \hat{\Omega} \mathfrak{M},$$

$$(35) \quad s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \bar{s} = \Omega \mathfrak{M} + \hat{\Omega} \mathfrak{M}.$$

Ferner gelten

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2 &= \frac{1}{\Omega} (\mathfrak{M}, [\bar{s}, \hat{s}]) = -\frac{1}{\hat{\Omega}} (\mathfrak{M}, [\bar{s}, \hat{s}]) \\ &= \frac{1}{\hat{s}_0} (\hat{s}, [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]) = \frac{1}{s_0} (\bar{s}, [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]) \\ &= \frac{1}{s_0^2 - \hat{s}_0^2} |(s_0 \bar{s} - \hat{s}_0 \hat{s})|^2 = \frac{1}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} |[\bar{s}, \hat{s}]|^2. \end{aligned} \right.$$

$$(37) \quad |(s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \bar{s})|^2 = (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)(s_0^2 - \hat{s}_0^2),$$

$$(38) \quad \Omega \mathfrak{M} - \hat{\Omega} \mathfrak{M} = \frac{1}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} \{(\Omega^2 - \hat{\Omega}^2)(s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \bar{s}) - 2 \Omega \hat{\Omega} [\bar{s}, \hat{s}]\},$$

$$(39) \quad \hat{\Omega} \mathfrak{M} + \Omega \mathfrak{M} = \frac{1}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} \{2 \Omega \hat{\Omega} (s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \bar{s}) + (\Omega^2 - \hat{\Omega}^2) [\bar{s}, \hat{s}]\}.$$

Die Vektorform ist für eine Reihe von Identitäten nicht geeignet. Diese schreiben wir in Komponenten, wobei man zu der hier angegebenen durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 jeweils zwei weitere findet:

$$(40) \quad \hat{s}_1 \hat{s}_2 - s_1 s_2 = M_{10} M_{20} + M_{23} M_{31},$$

$$(41) \quad s_1^2 - \hat{s}_1^2 = -\Omega^2 - M_{10}^2 + M_{31}^2 + M_{12}^2 = -\hat{\Omega}^2 - M_{23}^2 + M_{20}^2 + M_{30}^2,$$

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} s_0^2 - s_1^2 - \hat{s}_2^2 - \hat{s}_3^2 &= \frac{1}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} \{ (s_0 \hat{s}_1 - \hat{s}_0 s_1)^2 + (s_2 \hat{s}_3 - \hat{s}_2 s_3)^2 \} \\ &= M_{23}^2 + M_{10}^2 = -\hat{s}_0^2 + \hat{s}_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \end{aligned} \right.$$

Charakteristisch für diesen Formelsatz ist, daß er durch gewisse Permutationen der Größen in sich übergeführt wird, z. B. durch folgende (Multiplikation mit  $\gamma^4$ ):

Man ersetze	$\Omega$	$\hat{\Omega}$	$s_0$	$\hat{s}_0$	$\hat{s}$	$\hat{s}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}$
durch	$s_0$	$\pm i \hat{s}_0$	$\Omega$	$\mp i \hat{\Omega}$	$\mp i \mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}$	$\hat{s}$	$\pm i \hat{s}$

In der letzten Zeile gehören obere und untere Vorzeichen jeweils zusammen.

#### § 4. Die maximale Anzahl primärer algebraischer Identitäten

Nach § 3 gibt es in Komponenten gezählt 9 primäre Identitäten [Gl. (15)–(19)]. Der Nachweis, daß man damit alle hat, soll nun erbracht werden. Um die Schreibweise zu vereinfachen, bezeichnen wir in diesem Paragraphen die 16 Matrizen des Matrixringes mit fortlaufender Nummer  $j = 1$  bis 16 in der unten angeführten Reihenfolge

$$\alpha^j = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, I, \alpha^{[23]}, \alpha^{[31]}, \alpha^{[12]}, \alpha^{[14]}, \alpha^{[24]}, \alpha^{[34]}, \alpha^{[234]}, \alpha^{[314]}, \alpha^{[124]}, \alpha^{[123]})$$

und die 16 Funktionendubletts, die bei der Bildung innerer Produkte bei diesen Matrizen stehen, mit  $z_{\mu\nu} = \psi_\mu^* \psi_\nu$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ ). In dieser Bezeichnung bekommen die 16 Wahrscheinlichkeitsdichten in § 1 B a) bis d) folgendes Aussehen

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^1 z_{\mu\nu} = -s_1; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^7 z_{\mu\nu} = \hat{s}_1; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^{12} z_{\mu\nu} = \hat{M}_{30}; \\ \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^2 z_{\mu\nu} = -s_2; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^8 z_{\mu\nu} = \hat{s}_2; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^{13} z_{\mu\nu} = M_{23}; \\ \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^3 z_{\mu\nu} = -s_3; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^9 z_{\mu\nu} = \hat{s}_3; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^{14} z_{\mu\nu} = M_{31}; \\ \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^4 z_{\mu\nu} = \Omega; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^{10} z_{\mu\nu} = M_{10}; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^{15} z_{\mu\nu} = M_{12}; \\ \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^5 z_{\mu\nu} = -\hat{\Omega}; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^{11} z_{\mu\nu} = M_{20}; & \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^{16} z_{\mu\nu} = -\hat{s}_0; \\ \sum_{\mu, \nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu}^6 z_{\mu\nu} = s_0; & & \end{array} \right.$$

Faßt man die  $z_{\mu\nu}$  als Unbekannte auf, so hat man 16 lineare Gleichungen mit 16 Unbekannten vor sich. Dieses System hat eine und nur eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante

$$(44) \quad \Delta = \text{Det} \left| \alpha_{\mu\nu}^j \right| \quad \left( \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, 16 \\ \mu, \nu = 11, 12, \dots, 44 \end{array} \right)$$

von Null verschieden ist. Dies ist in der Tat der Fall: es läßt sich nämlich wiederum mit Hilfe der Paulischen Gleichung [a. a. O.<sup>2</sup>], Gl. 17)] zeigen, daß das Quadrat dieser Determinante von Null verschieden ist:

$$(45) \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{16} \alpha_{11}^j \alpha_{11}^j & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{11}^j \alpha_{12}^j & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{11}^j \alpha_{13}^j & \cdots & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{11}^j \alpha_{14}^j \\ \sum_{j=1}^{16} \alpha_{12}^j \alpha_{11}^j & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{12}^j \alpha_{12}^j & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{12}^j \alpha_{13}^j & \cdots & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{12}^j \alpha_{14}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{16} \alpha_{44}^j \alpha_{11}^j & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{44}^j \alpha_{12}^j & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{44}^j \alpha_{13}^j & \cdots & \sum_{j=1}^{16} \alpha_{44}^j \alpha_{14}^j \end{vmatrix}.$$

In dieser Schreibweise gilt nämlich

$$(46) \quad \sum_{j=1}^{16} \alpha_{\mu\nu}^j \alpha_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^j = 4 \delta_{\mu\nu} \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad \text{für beliebige } \mu, \nu, \bar{\mu}, \bar{\nu},$$

woraus hervorgeht, daß in jeder Zeile der Quadratdeterminante nur an der Stelle  $\bar{\mu} = \nu$ ,  $\bar{\nu} = \mu$  eine 4, sonst aber lauter Nullen stehen. Durch passende Vertauschung der Zeilen, wodurch nur das hier nicht interessierende Vorzeichen von  $\Delta^2$  betroffen werden kann, wird man  $\Delta^2$  in die Form bringen, worin in der Hauptdiagonale 4, sonst aber 0 steht. Man erhält damit für den Absolutbetrag des Determinantenquadrats

$$(47) \quad |\Delta^2| = 4^{16}$$

oder

$$(48) \quad |\Delta| = 2^{16} \neq 0.$$

Damit ist gezeigt, daß keine der linearen Gl. (43) Folge der übrigen ist und daß sich die Variablen  $z_{\mu\nu}$  eindeutig aus den rechten Seiten berechnen lassen. Solange die  $z_{\mu\nu}$  demnach freie Variable sind, bestehen also keine Identitäten zwischen den rechten Seiten.

Die  $z_{\mu\nu}$  sind aber keine freien Variablen. Aus dem Schema

$$(49) \quad \begin{cases} z_{11} = \psi_1^* \psi_1, & z_{12} = \psi_1^* \psi_2, & z_{13} = \psi_1^* \psi_3, & z_{14} = \psi_1^* \psi_4, \\ z_{21} = \psi_2^* \psi_1, & z_{22} = \psi_2^* \psi_2 = \frac{z_{12} \cdot z_{21}}{z_{11}}, & z_{23} = \psi_2^* \psi_3 = \frac{z_{13} \cdot z_{21}}{z_{11}}, & z_{24} = \psi_2^* \psi_4 = \frac{z_{14} \cdot z_{21}}{z_{11}}, \\ z_{31} = \psi_3^* \psi_1, & z_{32} = \psi_3^* \psi_2 = \frac{z_{12} \cdot z_{31}}{z_{11}}, & z_{33} = \psi_3^* \psi_3 = \frac{z_{13} \cdot z_{31}}{z_{11}}, & z_{34} = \psi_3^* \psi_4 = \frac{z_{14} \cdot z_{31}}{z_{11}}, \\ z_{41} = \psi_4^* \psi_1, & z_{42} = \psi_4^* \psi_2 = \frac{z_{12} \cdot z_{41}}{z_{11}}, & z_{43} = \psi_4^* \psi_3 = \frac{z_{13} \cdot z_{41}}{z_{11}}, & z_{44} = \psi_4^* \psi_4 = \frac{z_{14} \cdot z_{41}}{z_{11}} \end{cases}$$

wird ersichtlich, daß nur die 7 Variablen z. B.  $z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{21}, z_{31}, z_{41}$  des oberen und linken Randes dieses Schemas voneinander unabhängig sind, während die 9 übrigen aus ihnen folgen. Unter den 7 Variablen befinden sich eine reelle ( $z_{11}$ ) und 3 komplexe ( $z_{12}, z_{13}, z_{14}$ ), die in ihrem Real- und Imaginärteil der freien Wahl von je 2 Variablen entsprechen. Natürlich können auch andere 7 Variable dieses Schemas als die unabhängigen, andere 9 Variable als die abhängigen gewählt werden. Von Wichtigkeit ist aber, daß 7 Variable völlig frei wählbar bleiben müssen (im Rahmen der rein algebraischen Betrachtungen, ohne Anwendung der Diracgleichung!). Daher können im Höchstfall 9 primäre Identitäten zwischen den rechten Seiten von (43) bestehen, wenn, wie hier, neben dieser bilinearen Abhängigkeit der  $z_{\mu\nu}$  untereinander keine lineare Abhängigkeit der Gl. (43) untereinander bestanden hat ( $\Delta \neq 0$ ).

#### § 5. Das Zustandekommen der primären Identitäten an einem Spezialbeispiel

Nach § 4 muß es möglich sein, die primären Identitäten aus den Beziehungen (49) zwischen den Variablen  $z_{\mu\nu}$  herzuleiten. Während die bisherigen Überlegungen ohne jede Spezialisierung der Diracmatrizen galten, soll diese Herleitung mit einer speziellen Darstellung der  $\alpha$ -Matrizen vorgenommen werden:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} z_{11} + z_{22} - z_{33} - z_{44} &= \hat{S}_0, & z_{14} + z_{23} + z_{32} + z_{41} &= -s_1, \\ z_{11} + z_{22} + z_{33} + z_{44} &= s_0, & z_{14} - z_{23} + z_{32} - z_{41} &= -is_2, \\ z_{11} - z_{22} + z_{33} - z_{44} &= -\hat{s}_3, & z_{14} + z_{23} - z_{32} - z_{41} &= iM_{10}, \\ z_{11} - z_{22} - z_{33} + z_{44} &= -M_{12}, & z_{14} - z_{23} - z_{32} + z_{41} &= -M_{20}, \\ z_{12} + z_{21} + z_{34} + z_{43} &= -\hat{s}_1, & z_{13} - z_{24} + z_{31} - z_{42} &= -s_3, \\ z_{12} - z_{21} + z_{34} - z_{43} &= -i\hat{s}_2, & z_{13} + z_{24} + z_{31} + z_{42} &= \hat{s}_0, \\ z_{12} + z_{21} - z_{34} - z_{43} &= -M_{23}, & z_{13} - z_{24} - z_{31} + z_{42} &= iM_{10}, \\ z_{12} - z_{21} - z_{34} + z_{43} &= -iM_{31}, & z_{13} + z_{24} - z_{31} - z_{42} &= -i\hat{S}_2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man nach den 16 Variablen  $z_{\mu\nu}$  auflösen. Wenn man die  $z_{\mu\nu} = \psi_\mu^* \psi_\nu$  als Punkte in einem quadratischen Gitter darstellt, so bekommt man für jede Identität (primäre oder abgeleitete) als Bild ein Rechteck, das die 4 Punkte  $\mu, \nu; \varrho, \nu; \mu, \sigma; \varrho, \sigma$  als Eckpunkte besitzt, denn es gilt ja

$$z_{\varrho\sigma} = \frac{z_{\varrho\nu} \cdot z_{\mu\sigma}}{z_{\mu\nu}} \quad \text{oder} \quad z_{\mu\nu} \cdot z_{\varrho\sigma} = \psi_\varrho^* \psi_\mu^* \psi_\nu \psi_\sigma = z_{\varrho\nu} \cdot z_{\mu\sigma}.$$



Man kann jedes Rechteck  $R_{\mu\nu, \varrho\sigma}$  in diesem quadratischen Gitter durch seinen linken oberen Eckpunkt  $(\mu, \nu)$  und rechten unteren Eckpunkt  $(\varrho, \sigma)$  kennzeichnen. Wir wollen die entsprechende Identität

$$(50) \quad R_{\mu\nu, \varrho\sigma} = z_{\mu\nu} \cdot z_{\varrho\sigma} - z_{\varrho\nu} \cdot z_{\mu\sigma} = 0$$

unter dieser Eckpunktsbezeichnung verstehen. Im Gitterpunktschema kann man zu jedem der 16 Gitterpunkte einen von 9 anderen Gitterpunkten als gegenüberliegenden Eckpunkt eines Rechtecks wählen, während die übrigen 7 Gitterpunkte, die in derselben Zeile bzw. Spalte liegen, dazu untauglich sind. Man erhält so 144 Rechtecke, von denen je 4 übereinanderfallen, da jedes Rechteck 4 Ecken hat. Es gibt also 36 Identitäten, aus denen man die 9 primären herausuchen oder durch geeignete Kombinationen bilden kann. Auf diese Weise findet man

$$\begin{aligned} s_0^2 - \sum_{i=1}^3 s_i^2 - (\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) \\ = 4 \{ R_{11,33} + R_{11,44} + R_{22,33} + R_{22,44} + R_{13,24} + R_{31,42} \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_0^2 - \sum_{i=1}^3 \dot{s}_i^2 + (\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) \\ = 4 \{ R_{11,33} + R_{12,43} + R_{21,34} + R_{22,44} + R_{33,44} + R_{11,22} \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 \dot{s}_0 - \sum_{i=1}^3 s_i \dot{s}_i \\ = 2 \{ R_{11,24} + R_{11,42} + R_{12,33} + R_{21,32} + R_{13,44} + R_{31,44} + R_{32,43} + R_{23,34} \} = 0. \end{aligned}$$

Diese ersten 3 Identitäten stimmen schon mit den primären (15), (16), (17) überein, während aus den 6 übrigen durch Elimination von  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{M}$  die primären (18) und (19) hervorgehen:

$$\begin{aligned} s_0 \dot{s}_1 - \dot{s}_0 s_1 - \Omega M_{23} - \dot{\Omega} M_{10} \\ = -2 \{ R_{11,34} + R_{11,43} + R_{21,33} + R_{12,33} + R_{12,44} + R_{21,44} + R_{22,43} + R_{22,34} \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 \dot{s}_2 - \dot{s}_0 s_2 - \Omega M_{31} - \dot{\Omega} M_{20} \\ = 2i \{ R_{11,34} - R_{11,43} + R_{22,34} - R_{22,43} + R_{12,33} - R_{21,33} + R_{12,44} - R_{21,44} \} = 0, \end{aligned}$$

$$s_0 \dot{s}_3 - \dot{s}_0 s_3 - \Omega M_{12} - \dot{\Omega} M_{30} = 4 \{ R_{22,44} - R_{11,33} \} = 0,$$

$$\begin{aligned} s_2 \dot{s}_3 - \dot{s}_2 s_3 - \Omega M_{10} + \dot{\Omega} M_{23} \\ = 2i \{ R_{12,24} - R_{21,42} + R_{31,43} - R_{13,34} + R_{11,23} - R_{11,32} + R_{32,44} - R_{23,44} \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3 \dot{s}_1 - \dot{s}_3 s_1 - \Omega M_{20} + \dot{\Omega} M_{31} \\ = 2 \{ R_{11,23} + R_{11,32} + R_{13,34} + R_{31,43} - R_{21,42} - R_{12,24} - R_{32,44} - R_{23,44} \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 \dot{s}_2 - \dot{s}_1 s_2 - \Omega M_{30} + \dot{\Omega} M_{12} \\ = 2i \{ R_{11,24} - R_{11,42} + R_{13,44} - R_{31,44} + R_{21,32} - R_{12,23} + R_{32,43} - R_{23,34} \} = 0. \end{aligned}$$

## § 6. Einige Formeln

Der ins Auge gefaßten Anwendung wegen müssen hier noch einige Formeln Platz finden, die, wenn sie auch leicht ableitbar sind, doch teilweise ein überraschendes Aussehen besitzen.

Für einen ganz beliebigen Vektor  $\mathbf{f}$  gilt die Gleichung

$$(51) \quad \begin{cases} (\hat{s}_0^2 + \Omega^2 + \hat{\Omega}^2) \hat{s}(\hat{s}, \mathbf{f}) + (\hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2) \hat{s}(\hat{s}, \mathbf{f}) \\ - s_0 \hat{s}_0 \{ \hat{s}(\hat{s}, \mathbf{f}) + \hat{s}(\hat{s}, \mathbf{f}) \} + [\hat{s}, \hat{s}]([\hat{s}, \hat{s}], \mathbf{f}) \\ + (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2 - s_0^2 + \hat{s}_0^2) \mathbf{f} = 0. \end{cases}$$

Der Sinn dieser Vektorgleichung tritt zutage, wenn man einen beliebigen Vektor  $\mathbf{f}$  in einem Koordinatensystem mit den Achsen  $\hat{s}$ ,  $\hat{s}$  und  $[\hat{s}, \hat{s}]$  darstellt:

$$\mathbf{f} = h_1 \hat{s} + h_2 \hat{s} + h_3 [\hat{s}, \hat{s}].$$

Dann werden die Komponenten

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{(\hat{s}_0^2 + \Omega^2 + \hat{\Omega}^2) (\hat{s}, \mathbf{f}) - s_0 \hat{s}_0 (\hat{s}, \mathbf{f})}{(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2)}, \\ h_2 &= \frac{(s_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2) (\hat{s}, \mathbf{f}) - s_0 \hat{s}_0 (\hat{s}, \mathbf{f})}{(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2)}, \\ h_3 &= \frac{([\hat{s}, \hat{s}], \mathbf{f})}{(\hat{\Omega}^2 + \hat{\Omega}^2) (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2)}. \end{aligned}$$

Ferner sind bei Umformungen im folgenden von Wichtigkeit Formeln, die Differentialquotienten enthalten oder die durch Differentiationen aus den Identitäten des § 3 hervorgehen. Es ist

$$(52) \quad (\hat{s}, (\hat{s} \text{ grad}) \hat{s}) = -(\hat{s}, \Omega \text{ grad } \Omega + \hat{\Omega} \text{ grad } \hat{\Omega}) + s_0 (\hat{s}, \text{grad } s_0),$$

$$(53) \quad (\hat{s}, (\hat{s} \text{ grad}) \hat{s}) = (\hat{s}, \Omega \text{ grad } \Omega + \hat{\Omega} \text{ grad } \hat{\Omega}) + \hat{s}_0 (\hat{s}, \text{grad } \hat{s}_0).$$

*Beweis:* Die Anwendung der Vektorformel  $(\mathfrak{A}, (\mathfrak{B} \text{ grad}) \mathfrak{A}) = (\mathfrak{B}, \text{grad } \frac{\mathfrak{A}^2}{2})$

auf die linken Seiten der obigen Gleichungen unter Berücksichtigung der Identitäten (15) und (16) ergibt diese Formeln.

$$(54) \quad \begin{cases} [\mathfrak{M}, \text{rot } \mathfrak{M}] - \mathfrak{M} \text{ div } \mathfrak{M} + [\mathfrak{M}, \text{rot } \mathfrak{M}] - \mathfrak{M} \text{ div } \mathfrak{M} + [\hat{s}, \text{rot } \hat{s}] - \hat{s} \text{ div } \hat{s} \\ - ([\hat{s}, \text{rot } \hat{s}] - \hat{s} \text{ div } \hat{s}) + \frac{1}{2} \text{grad } (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2 - s_0^2 + \hat{s}_0^2) = 0. \end{cases}$$

*Beweis:* Dieser ist am einfachsten in Komponenten zu führen. Die 1. Komponente dieser Gleichung läßt sich schreiben, geordnet nach Differentiationen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (M_{31}^2 + M_{12}^2 - M_{23}^2 + M_{20}^2 + M_{30}^2 - M_{10}^2 \\ & \quad + s_2^2 + s_3^2 - s_1^2 - \hat{s}_2^2 - \hat{s}_3^2 + \hat{s}_1^2 + \Omega^2 + \hat{\Omega}^2 - s_0^2 + \hat{s}_0^2) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_2} (M_{23} M_{31} + M_{10} M_{20} + s_1 s_2 - \hat{s}_1 \hat{s}_2) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_3} (M_{12} M_{23} + M_{30} M_{10} + s_3 s_1 - \hat{s}_3 \hat{s}_1) \equiv 0, \end{aligned}$$

da schon jedes einzelne Glied verschwindet: das erste unter Verwendung von Gl. (15), (16), (41), die beiden nächsten nach Gl. (40).

Außerdem folgen durch grad-Bildung aus den algebraischen Identitäten (15)–(17), (20)–(22), (25)–(28), durch rot- und div-Bildung der Formeln (29)–(35) Differentialbeziehungen, die in III und IV vielfältig zur Anwendung kommen.

#### § 7. Geometrische Darstellung und physikalische Bedeutung einiger Identitäten

An Stelle des einen Vektors der Stromdichte in der Schrödingerschen Theorie treten in der Diracschen Theorie des Elektrons in jedem Raumpunkt die 4 Vektoren Stromdichte  $\vec{s}$ , Spindichte  $\hat{s}$ , Dichte des magnetischen Moments  $\mathfrak{M}$  und Dichte des elektrischen Moments  $\mathfrak{M}$  auf. Nach (18) und (19) stehen die beiden Ebenen, die von  $\vec{s}$  und  $\hat{s}$  bzw.  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}$  aufgespannt werden, aufeinander senkrecht: die Schnittgerade beider Ebenen hat die Richtung des Vektors

$$s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \vec{s} = \Omega \mathfrak{M} + \hat{\Omega} \mathfrak{M}.$$

Mehr läßt sich, ohne Hermiteizität der Diracschen Matrizen zu verlangen, nicht aussagen. Sind jedoch die Diracmatrizen hermiteisch, so sind die Wahrscheinlichkeitsdichten  $s_0, \vec{s}, \hat{s}_0, \hat{s}, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \Omega, \hat{\Omega}$  reell. Aus (36)

$$[\vec{s}, \hat{s}]^2 = (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)(s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2)$$

folgt dann, daß  $s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2 \geq 0$  ist, daß die Projektion von  $\frac{\mathfrak{M}}{\Omega}$  auf  $[\vec{s}, \hat{s}]$  positiv, von  $\frac{\mathfrak{M}}{\hat{\Omega}}$  auf  $[\vec{s}, \hat{s}]$  negativ ist und daß die Projektionen von  $\frac{\vec{s}}{s_0}, \frac{\hat{s}}{\hat{s}_0}$  auf  $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$  beide positiv sind. Dies bedeutet aber, daß  $\frac{\mathfrak{M}}{\Omega}$  oberhalb,  $\frac{\mathfrak{M}}{\hat{\Omega}}$  unterhalb der von  $\vec{s}$  und  $\hat{s}$  aufgespannten Ebene liegen, während sich  $\frac{\vec{s}}{s_0}$  und  $\frac{\hat{s}}{\hat{s}_0}$  auf derselben Seite der von  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}$  aufgespannten Ebene befinden. Die Absolutbeträge aller 4 Projektionen sind gleich. Damit dürfte erschöpft sein, was sich ohne Wahl eines Spezialbeispiels bei Hermiteizität noch über die 4 Vektoren  $\vec{s}, \hat{s}, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}$  aussagen läßt.

Von besonderem Interesse ist auch Gl. (29) in der Form

$$\mathfrak{M} = \left[ \frac{\vec{s}}{s_0}, \mathfrak{M} \right] + \hat{\Omega} \frac{\hat{s}}{s_0}.$$

Darin kann man  $\frac{\vec{s}}{s_0} = \frac{\mathbf{v}}{c}$  einführen, worin  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit des Elektrons,  $c$  die des Lichts ist, und erkennt, daß ein dem

Frenkelschen Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Moment

$$\mathfrak{M} = \left[ \frac{v}{c}, \mathfrak{M} \right]$$

ähnlicher Zusammenhang in der Diracschen Theorie schon durch die *Algebra* der Diracmatrizen vorgeschrieben wird. Es tritt allerdings noch ein Glied  $\Omega \frac{\hat{s}}{s_0}$  hinzu, das offenbar den Beitrag des Spins zum elektrischen Moment angibt. Bei der Deutung von  $\frac{\hat{s}}{s_0} = \frac{v}{c}$  enthält auch  $v$  allerdings außer der Lineargeschwindigkeit auch noch rotatorische Teile, wie aus der Gordonschen Zerlegung von  $\hat{s}$  in Konvektionsstrom und Polarisations- bzw. Magnetisierungsstrom hervorgeht. Vgl. dazu III, Formel (12).

Eine analoge Betrachtung gilt auch für Formel (31) in der Form

$$\mathfrak{M} = - \left[ \frac{\hat{s}}{s_0}, \mathfrak{M} \right] + \Omega \frac{\hat{s}}{s_0} \longrightarrow - \left[ \frac{v}{c}, \mathfrak{M} \right] + \Omega \frac{\hat{s}}{s_0},$$

deren erstes Glied das von einem mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten elektrischen Moment erzeugte magnetische Moment darstellt. Das Glied  $\Omega \frac{\hat{s}}{s_0}$  offenbart den Beitrag des Spins zum erzeugten magnetischen Moment.

Am Vorangehenden ist vor allem die Tatsache verblüffend, daß die betrachteten Beziehungen von der Form der Bewegungsgleichung (d. h. der Diracschen Gleichung des Elektrons) unabhängig sind, da sie schon aus dem von Dirac gewählten Zahlensystem  $\alpha^i \alpha^k + \alpha^k \alpha^i = 2\delta_{ik}$  und der Bildungsvorschrift von Wahrscheinlichkeitsdichten ( $\psi^*, \alpha^j \psi$ ) entspringen.

#### Literaturverzeichnis

- 1) W. Kofink, Ann. d. Phys. [5] **30**, S. 91. 1937.
- 2) W. Pauli, Pieter Zeeman-Verhandelingen 1935. S. 31 ff.

Frankfurt a. M., Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 4. September 1940)

## Zur Diracschen Theorie des Elektrons

### II. Algebraische Identitäten in der Diracschen Theorie des Elektrons, die Differentialquotienten enthalten

Von W. Kofink

#### Einleitung und Zusammenfassung

In der Diracschen Gleichung des Elektrons im äußeren Feld sind die elektromagnetischen Potentiale *reell*. Durch Übergang zum Konjugiert-Komplexen erhält man also eine zweite Gleichung mit denselben Potentialen. Indem man weiterhin die Diracgleichung *nacheinander* mit den 16 Matrizen des gesamten hyperkomplexen Diracschen Zahlensystems multipliziert, d. h. mit  $I, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^{[23]}, \alpha^{[31]}, \alpha^{[12]}, \dots, \alpha^1 \alpha^2 \alpha^3 \alpha^4$  und zu diesen Gleichungen jeweils die Konjugiert-Komplexe bildet, erhält man 32 Gleichungen, aus denen man die 4 Potentiale eliminieren kann. Die verbleibenden 28 Gleichungen, die hier unter dem Namen „*Realitätsrelationen*“ laufen mögen, sind Differentialbeziehungen, welche die in der Diracschen Theorie vorkommenden Größen miteinander verknüpfen. Sie bestehen immer, gleichgültig, wie das Potential im Spezialfalle lauten mag.

In dieser primitiven Form der Ableitung enthalten die 28 Realitätsrelationen aber außer den deutbaren Größen und deren Ableitungen auch *undeutbare* Größen (Teil III, § 1). Die deutbaren Größen haben z. B. die Form  $(\psi^*, O \psi)$  oder

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\psi^*, O \psi) = \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}, O \psi \right) + \left( \psi^*, O \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right),$$

während die undeutbaren die Form z. B.

$$\left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}, O \psi \right) - \left( \psi^*, O \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)$$

besitzen, wobei  $O$  irgendeinen Operator aus dem Diracschen Matrixring bedeutet.

Ziel von Teil II ist es, die *mathematischen Hilfsmittel* für die Hauptaufgabe dieser Arbeit, nämlich für die Elimination der undeutbaren Größen aus den Realitätsrelationen zu liefern, um sie von ihrer primitiven, undeutbaren Form in eine deutbare überzuführen (Teil III, § 2).

Dementsprechend beschäftigt sich Teil II mit den Größen  $\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}, O \psi\right)$  und  $\left(\psi^*, O \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)$ . Formen dieser Art bezeichnen wir als „vorn“ bzw. „hinten“ differenziert. Aus ihnen setzen sich die undeutbaren Größen zusammen; um sie in deutbare zu verwandeln, muß man also diese vorn und hinten differenzierten Größen betrachten und ihre *Differenzen* durch *Summen* von vorn und hinten differenzierten Größen ausdrücken. Diese Aufgabe löst Teil II.

Dazu werden in § 1 mit Hilfe der ersten Bilineargleichung [I Gl. (4)] 256 algebraische Identitäten unter den vorn differenzierten Größen abgeleitet, indem die 2 in Gl. (\*) vorkommenden Operatoren  $P$  und  $Q$  unabhängig voneinander die 16 Matrizen des Rings durchlaufen. Durch teilweise Anwendung der Vektorschreibweise lassen sie sich in die Formelsammlung 1—52 zusammendrängen. In § 2 wird dasselbe für die hinten differenzierten Größen durchgeführt und eine Vorschrift angegeben, nach welcher man von jeder Formel für die vordere Differentiation zu einer entsprechenden Formel für die hintere Differentiation übergehen kann. In § 3 wird gezeigt, daß die Anwendung der 2. Grundgleichung nichts ergibt, was nicht aus der 1. Grundgleichung ebenfalls gewonnen werden kann, solange man nur von den Symmetrieeigenschaften der Matrix  $B$  Gebrauch macht. § 4 enthält eine andersartige Anwendung der 1. Grundgleichung: Die in §§ 1 und 2 aufgestellten Gleichungen für die vorn und hinten differenzierten Größen enthalten als Koeffizienten undifferenzierte Größen; in § 4 wird dagegen die 1. Grundgleichung so angewandt, daß nur differenzierte Größen auftreten. Während also die Gleichungen der §§ 1 und 2 linear in den vorn bzw. hinten differenzierten Größen sind, sind die des § 4 bilinear, bzw. quadratisch. In §§ 5—9 werden die in §§ 1—4 aufgestellten Identitäten nach den vorn bzw. hinten differenzierten Größen aufgelöst. In § 5 findet man die Lösungen für  ${}^k s_0, {}^k s_1, {}^k s_2, {}^k s_3$ , in § 6 die für  $s_0^k, \hat{s}^k, s_0^k, \hat{s}^k$ , in § 8 die für  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*, \mathfrak{M}^k$ . In diesen Lösungen treten ein sehr bemerkenswerter vierdimensionaler Nullvektor — den man auch als dreidimensionalen komplexen Einheitsvektor ( $q$  bzw.  $p$ ) schreiben kann — und 2 zunächst unbekannte Parameter  $\xi$  und  $\eta$  auf. Über sie geben §§ 7 und 9 Aufschluß. Nach diesen Ergänzungen sind die Lösungen vollständig und die Zurückführung der undeutbaren auf deutbare Größen wird in § 10, soweit dies überhaupt möglich ist, vorgenommen: alle undeutbaren Größen lassen sich auf eine *einzige* reduzieren [Gl. (87)—(93)].

Es gelingt also, durch geeignete Kombination differenzierter und undifferenzierter Größen bei der Reduktion der undeutbaren

Größen viel weiter zu kommen als zu 9 Identitäten wie im Falle der undifferenzierten Größen allein. Dort sind 7 unabhängig, z. B.  $\Omega$ ,  $\bar{\Omega}$ ,  $\hat{\Omega}$ . Hier nur eine einzige, z. B.  $i(\Omega - \bar{\Omega})$ .

Als Abschluß findet man in § 11 eine Formelsammlung über die Umwandlung verschiedener Kombinationen undeutbarer Größen in deutbare.

Wegen der Bedeutung aller vorkommenden Zeichen vgl. I, § 1.

### § 1. Anwendung der ersten Bilineargleichung auf die vordere Differentiation

Um nun die in I, § 2 erwähnte Bilineargleichung (I, 4)

$$\sum_{k=1}^3 \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^k \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^k + \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^{[123]} \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^{[123]} = \delta_{\bar{\varrho}\sigma} \delta_{\bar{\varrho}\sigma} - \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^5 \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^5 - \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^4 \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^4 + \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^{[123]} \gamma_{\bar{\varrho}\sigma}^{[123]}$$

für die „vordere“ Differentiation zur Anwendung zu bringen, multipliziere man sie mit (vordere Multiplikation)  $P_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} Q_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ , wobei  $P$  und  $Q$  zwei zunächst beliebige 4reihige Matrizen sein mögen, und summiere über  $\bar{\varrho}$  und  $\bar{\sigma}$ . Man erhält dann

$$\sum_{k=1}^3 (P \gamma^k)_{\bar{\varrho}\sigma} (Q \gamma^k)_{\bar{\varrho}\sigma} + (P \gamma^{[123]})_{\bar{\varrho}\sigma} (Q \gamma^{[123]})_{\bar{\varrho}\sigma} = P_{\bar{\varrho}\sigma} Q_{\bar{\varrho}\sigma} - (P \gamma^5)_{\bar{\varrho}\sigma} (Q \gamma^5)_{\bar{\varrho}\sigma} - (P \gamma^4)_{\bar{\varrho}\sigma} (Q \gamma^4)_{\bar{\varrho}\sigma} + (P \gamma^{[123]})_{\bar{\varrho}\sigma} (Q \gamma^{[123]})_{\bar{\varrho}\sigma}.$$

Bedeutet  $\varphi_{\bar{\varrho}}$ ,  $\xi_{\bar{\varrho}}$ ,  $\chi_{\bar{\varrho}}$ ,  $\psi_{\bar{\varrho}}$  je einen Satz von 4 Funktionen, so ergibt Multiplikation mit diesen Funktionen und Summation über die Indizes  $\varrho$ ,  $\bar{\varrho}$ ,  $\sigma$ ,  $\bar{\sigma} = 1, \dots, 4$  eine bilineare Gleichung mit inneren Produkten:

$$\sum_{k=1}^3 (\varphi, P \gamma^k \chi)(\xi, Q \gamma^k \psi) + (\varphi, P \gamma^{[123]} \chi)(\xi, Q \gamma^{[123]} \psi) = (\varphi, P \psi)(\xi, Q \chi) - (\varphi, P \gamma^5 \psi)(\xi, Q \gamma^5 \chi) - (\varphi, P \gamma^4 \psi)(\xi, Q \gamma^4 \chi) + (\varphi, P \gamma^{[123]} \psi)(\xi, Q \gamma^{[123]} \chi).$$

Sind die 4 Funktionen, die durch  $\chi$  dargestellt werden, dieselben wie die durch  $\psi$  dargestellten, so heben sich die Glieder weg, die explizit  $\gamma^{[123]}$  enthalten, und es bleibt eine Gleichung einfacher Form

$$\sum_{j=1}^5 (\varphi, P \gamma^j \psi)(\xi, Q \gamma^j \psi) = (\varphi, P \psi)(\xi, Q \psi).$$

Schließlich führt die Substitution  $\varphi = \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}$  und  $\xi = \psi^+$  zu der für die Anwendung auf die vordere Differentiation tauglichen Form:

$$(*) \quad \sum_{j=1}^5 \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, P \gamma^j \psi \right) (\psi^+, Q \gamma^j \psi) = \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, P \psi \right) (\psi^+, Q \psi).$$



Läßt man nun  $P$  und  $Q$  die 16 Matrizen des Matrixringes der Diracmatrizen durchlaufen, so entstehen 256 — verschiedene — lineare Gleichungen für die 16 vorn nach  $x_k$  differenzierten inneren Produkte  ${}^k\Omega$ ,  ${}^k\hat{\Omega}$ ,  ${}^k s_\mu$ ,  ${}^k\hat{s}_\mu$ ,  ${}^k M_{lm}$ ,  ${}^k\hat{M}_{lm}$  mit undifferenzierten inneren Produkten  $\Omega$ ,  $\hat{\Omega}$ ,  $s_\mu$ ,  $\hat{s}_\mu$ ,  $M_{lm}$ ,  $\hat{M}_{lm}$  —  $\mu = 0, 1, 2, 3$  und  $(l, m) = 1, 2, 3$  — als Koeffizienten. Man erhält diese Gleichungen am einfachsten aus der Tab. I S. 95 der früheren Veröffentlichung\*), worin  $R$  einer der Operatoren  $P, Q$  ist und an der Kreuzungsstelle von Zeile und Spalte jeweils das innere Produkt  $(\psi^\dagger, R \gamma^j \psi)$  steht\*\*). Der erste Faktor wird zur Bezeichnung der vorderen Differentiation nach  $x_k$  immer mit einem vorderen, oberen Index  $k$  versehen. Im folgenden sind die so aus Gl. (\*) erhaltenen Beziehungen zusammengestellt und links die Operatoren  $P$  und  $Q$  angegeben, welche zu dieser Gleichung führten. Für einen Teil der Gl. (1)–(26) wird die Vektorschreibweise benutzt, für den anderen Teil (27)–(52), der sich für die Vektorschreibweise nicht eignet, wird je eine Komponente angeschrieben.

A. Die erste Gruppe von Identitäten enthält nur die vorn differenzierten Größen  ${}^k s_0$ ,  ${}^k \hat{s}$ ,  ${}^k \Omega$ ,  ${}^k \hat{\Omega}$ .

$P$	$Q$	
$I$	$I$	(1) ${}^k s_0 s_0 - ({}^k \hat{s}, \hat{s}) = {}^k \Omega \Omega + {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega}$ ,
$I$	$\gamma^5$	(2) ${}^k s_0 \hat{s}_0 - ({}^k \hat{s}, \hat{s}) = i({}^k \Omega \hat{\Omega} - {}^k \hat{\Omega} \Omega)$ ,
$I$	$\gamma^{[14]}$	(3) ${}^k s_0 \hat{s} - {}^k \hat{s} s_0 + i[{}^k \hat{s}, \hat{s}] = i({}^k \Omega \mathfrak{M} - {}^k \hat{\Omega} \mathfrak{M})$ ,
$I$	$\gamma^{[23]}$	(4) ${}^k s_0 \hat{s} - {}^k \hat{s} s_0 + i[{}^k \hat{s}, \hat{s}] = {}^k \Omega \mathfrak{M} + {}^k \hat{\Omega} \mathfrak{M}$ ,
$I$	$\gamma^{[123]}$	(5) $({}^k \hat{s}, \mathfrak{M}) - {}^k \Omega \hat{s}_0 = i({}^k \hat{\Omega} s_0 - {}^k s_0 \hat{\Omega})$ ,
$I$	$\gamma^{[234]}$	(6) ${}^k s_0 \mathfrak{M} + [{}^k \hat{s}, \mathfrak{M}] - {}^k \Omega \hat{s} = i({}^k \hat{\Omega} \hat{s} - {}^k \hat{s} \hat{\Omega})$ ,
$I$	$\gamma^4$	(7) $({}^k \hat{s}_0, \mathfrak{M}) - {}^k \hat{\Omega} s_0 = i({}^k s_0 \Omega - {}^k \Omega s_0)$ ,
$I$	$\gamma^1$	(8) ${}^k s_0 \mathfrak{M} - [{}^k \hat{s}, \mathfrak{M}] - {}^k \hat{\Omega} \hat{s} = i({}^k \hat{s} \Omega - {}^k \Omega \hat{s})$ .

B. Die zweite Gruppe von Identitäten enthält nur die vorn differenzierten Größen  ${}^k s_0$ ,  ${}^k \hat{s}$ ,  ${}^k \Omega$ ,  ${}^k \hat{\Omega}$ :

$\gamma^5$	$\gamma^5$	(9) ${}^k s_0 \hat{s}_0 - ({}^k \hat{s}, \hat{s}) = -({}^k \Omega \Omega + {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega})$ ,
$\gamma^5$	$I$	(2') ${}^k s_0 s_0 - ({}^k \hat{s}, \hat{s}) = -i({}^k \Omega \hat{\Omega} - {}^k \hat{\Omega} \Omega)$ ,
$\gamma^5$	$\gamma^{[14]}$	(10) ${}^k s_0 \hat{s} - {}^k \hat{s} s_0 + i[{}^k \hat{s}, \hat{s}] = -({}^k \hat{\Omega} \mathfrak{M} + {}^k \Omega \mathfrak{M})$ ,
$\gamma^5$	$\gamma^{[23]}$	(11) ${}^k s_0 \hat{s} - {}^k \hat{s} s_0 + i[{}^k \hat{s}, \hat{s}] = i({}^k \hat{\Omega} \mathfrak{M} - {}^k \Omega \mathfrak{M})$ ,

\*) W. Kofink, Ann. d. Phys. [5] 30. S. 91. 1937.

\*\*) Druckfehlerberichtigung. Diese Tabelle enthält 2 Druckfehler. Am Kreuzungspunkt der Zeile  $\gamma^5$  und der Spalte  $\gamma^4$  muß  $-i s_0$  statt  $-s_0$ , am Kreuzungspunkt der Zeile  $E$  und der Spalte  $\gamma^{[123]}$  muß  $s_0$  statt  $i s_0$  stehen.

$P$	$Q$	
$\gamma^5$	$\gamma^{[123]}$ (12)	$({}^k\hat{s}, \mathfrak{M}) - {}^k\Omega s_0 = i({}^k\hat{\Omega} s_0 - {}^k s_0 \hat{\Omega}),$
$\gamma^5$	$\gamma^{[234]}$ (13)	${}^k s_0 \mathfrak{M} + [{}^k\hat{s}, \mathfrak{M}] - {}^k\Omega \mathfrak{s} = i({}^k\hat{\Omega} \mathfrak{s} - {}^k\hat{s} \hat{\Omega}),$
$\gamma^5$	$\gamma^4$ (14)	$({}^k\hat{s}, \mathfrak{M}) - {}^k\hat{\Omega} s_0 = i({}^k s_0 \Omega - {}^k\Omega s_0),$
$\gamma^5$	$\gamma^1$ (15)	${}^k s_0 \mathfrak{M} - [{}^k\hat{s}, \mathfrak{M}] - {}^k\hat{\Omega} \mathfrak{s} = i({}^k\hat{s} \Omega - {}^k\Omega \hat{s}).$

Wenn  $P \neq Q$  ist, so entsteht durch Vertauschen von  $P$  und  $Q$  je eine weitere Identität, die aus der angeführten hervorgeht, wenn man das Kennzeichen der vorderen Differentiation  $k$  vom ersten Faktor auf den zweiten verschiebt. Gl. (2') geht auf diese Weise aus Gl. (2) hervor. Wir erwähnen außer diesem Beispiel keine dieser Identitäten. Sie sind ja aus den angeschriebenen leicht zu gewinnen.

C. Die dritte Gruppe von Identitäten enthält nur die vorn differenzierten Größen  ${}^k s_0$ ,  ${}^k s_0$ ,  ${}^k \mathfrak{M}$ ,  ${}^k \mathfrak{M}$ ,  ${}^k \Omega$ ,  ${}^k \hat{\Omega}$ :

$P$	$Q$	
$\gamma^{[123]}$	$\gamma^{[23]}$ (16)	${}^k \hat{\Omega} \hat{s} - {}^k s_0 \mathfrak{M} - [{}^k \mathfrak{M}, \hat{s}] = i({}^k \mathfrak{M} s_0 - {}^k s_0 \mathfrak{M}),$
$\gamma^{[123]}$	$\gamma^{[14]}$ (17)	${}^k \hat{\Omega} \mathfrak{s} - {}^k s_0 \mathfrak{M} - [{}^k \mathfrak{M}, \hat{s}] = i({}^k \mathfrak{M} s_0 - {}^k s_0 \mathfrak{M}),$
$\gamma^4$	$\gamma^{[23]}$ (18)	${}^k \Omega \hat{s} - {}^k s_0 \mathfrak{M} + [{}^k \mathfrak{M}, \hat{s}] = -i({}^k \mathfrak{M} s_0 - {}^k s_0 \mathfrak{M}),$
$\gamma^4$	$\gamma^{[14]}$ (19)	${}^k \Omega \mathfrak{s} - {}^k s_0 \mathfrak{M} + [{}^k \mathfrak{M}, \hat{s}] = -i({}^k \mathfrak{M} s_0 - {}^k s_0 \mathfrak{M}),$
$\gamma^4$	$\gamma^1$ (20)	$[{}^k \mathfrak{M}, \mathfrak{M}] + {}^k s_0 \mathfrak{s} - {}^k s_0 \hat{s} = i({}^k \Omega \mathfrak{M} - {}^k \mathfrak{M} \Omega),$
$\gamma^{[123]}$	$\gamma^{[234]}$ (21)	$-[{}^k \mathfrak{M}, \mathfrak{M}] + {}^k s_0 \mathfrak{s} - {}^k s_0 \hat{s} = -i({}^k \hat{\Omega} \mathfrak{M} - {}^k \mathfrak{M} \hat{\Omega}),$
$\gamma^4$	$\gamma^{[234]}$ (22)	$-{}^k s_0 \hat{s} + {}^k s_0 \mathfrak{s} + {}^k \mathfrak{M} \hat{\Omega} + {}^k \Omega \mathfrak{M} = i[{}^k \mathfrak{M}, \mathfrak{M}],$
$\gamma^{[123]}$	$\gamma^1$ (23)	$-{}^k s_0 \hat{s} + {}^k s_0 \mathfrak{s} + {}^k \hat{\Omega} \mathfrak{M} + {}^k \mathfrak{M} \Omega = i[{}^k \mathfrak{M}, \mathfrak{M}],$
$\gamma^4$	$\gamma^{[123]}$ (24)	$({}^k \mathfrak{M}, \mathfrak{M}) - {}^k \Omega \hat{\Omega} = i({}^k s_0 \hat{s}_0 - {}^k s_0 s_0),$
$\gamma^4$	$\gamma^4$ (25)	$({}^k \mathfrak{M}, \mathfrak{M}) + {}^k \Omega \Omega - {}^k s_0 s_0 + {}^k s_0 \hat{s}_0 = 0,$
$\gamma^{[123]}$	$\gamma^{[123]}$ (26)	$({}^k \mathfrak{M}, \mathfrak{M}) + {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega} - {}^k s_0 s_0 + {}^k s_0 \hat{s}_0 = 0.$

Für die übrigen Identitäten eignet sich die vektorielle Schreibweise nicht. Von ihnen führen wir je eine Komponente an, aus der durch zyklische Vertauschung der Indizes zwei weitere Komponenten hervorgehen. Wir fassen sie zu Gruppen analoger Bauart zusammen.

D. Analog zu Gl. [I, (25)–(28)]:

$P$	$Q$	
$\gamma^1$	$\gamma^{[23]}$ (27)	${}^k \Omega \hat{s}_0 - {}^k s_1 M_{23} - {}^k M_{31} s_2 - {}^k M_{12} s_3 = i({}^k s_1 M_{10} - {}^k M_{10} \hat{s}_1),$
$\gamma^1$	$\gamma^{[14]}$ (28)	${}^k \Omega s_0 - {}^k \hat{s}_1 M_{23} - {}^k M_{31} \hat{s}_2 - {}^k M_{12} \hat{s}_3 = i({}^k s_1 M_{10} - {}^k M_{10} s_1),$
$\gamma^{[234]}$	$\gamma^{[23]}$ (29)	${}^k \hat{\Omega} \hat{s}_0 - {}^k s_1 M_{10} - {}^k M_{20} s_2 - {}^k M_{30} s_3 = -i({}^k s_1 M_{23} - {}^k M_{23} \hat{s}_1),$
$\gamma^{[234]}$	$\gamma^{[14]}$ (30)	${}^k \hat{\Omega} s_0 - {}^k \hat{s}_1 M_{10} - {}^k M_{20} \hat{s}_2 - {}^k M_{30} \hat{s}_3 = -i({}^k s_1 M_{23} - {}^k M_{23} s_1).$

E. Analog zu Gl. [I, (29)–(32)]:

$$\begin{aligned}
 \gamma^{[12]} \gamma^{[24]} (31) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{10} s_0 + {}^k M_{12} s_2 - {}^k s_3 M_{31} = i ({}^k s_3 M_{20} - {}^k M_{20} s_3), \\
 \gamma^{[34]} \gamma^{[34]} (32) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{10} s_0 - {}^k M_{31} s_3 + {}^k s_2 M_{12} = -i ({}^k s_2 M_{30} - {}^k M_{30} s_2), \\
 \gamma^{[24]} \gamma^{[31]} (33) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{10} s_0 + {}^k M_{12} s_2 - {}^k s_3 M_{31} = i ({}^k s_3 M_{20} - {}^k M_{20} s_3), \\
 \gamma^{[31]} \gamma^{[12]} (34) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{10} s_0 - {}^k M_{31} s_3 + {}^k s_2 M_{12} = -i ({}^k s_2 M_{30} - {}^k M_{30} s_2), \\
 \gamma^3 \gamma^{[21]} (35) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{23} s_0 - {}^k M_{30} s_2 + {}^k s_3 M_{20} = i ({}^k s_3 M_{31} - {}^k M_{31} s_3), \\
 \gamma^2 \gamma^{[31]} (36) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{23} s_0 + {}^k M_{20} s_3 - {}^k s_2 M_{30} = -i ({}^k s_2 M_{12} - {}^k M_{12} s_2), \\
 \gamma^3 \gamma^{[31]} (37) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{23} s_0 - {}^k M_{30} s_2 + {}^k s_3 M_{20} = i ({}^k s_3 M_{31} - {}^k M_{31} s_3), \\
 \gamma^2 \gamma^{[12]} (38) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{s}_1 - {}^k M_{23} s_0 + {}^k M_{20} s_3 - {}^k s_2 M_{30} = -i ({}^k s_2 M_{12} - {}^k M_{12} s_2).
 \end{aligned}$$

F. Analog zu Gl. [I, (33), (34) und (40)]:

$$\begin{aligned}
 \gamma^{[24]} \gamma^{[12]} (39) \quad & {}^k s_0 s_1 - {}^k s_1 s_0 + {}^k M_{20} M_{12} - {}^k M_{31} M_{30} = -i ({}^k s_2 s_3 - {}^k s_3 s_2), \\
 \gamma^{[34]} \gamma^{[31]} (40) \quad & {}^k s_0 s_1 - {}^k s_0 s_1 + {}^k M_{12} M_{20} - {}^k M_{30} M_{31} = -i ({}^k s_2 s_3 - {}^k s_3 s_2), \\
 \gamma^2 \gamma^{[24]} (41) \quad & {}^k s_2 s_3 - {}^k s_2 s_3 + {}^k M_{23} \hat{\Omega} - {}^k \hat{\Omega} M_{10} = i ({}^k M_{20} M_{12} - {}^k M_{12} M_{20}), \\
 \gamma^3 \gamma^{[31]} (42) \quad & {}^k s_2 s_3 - {}^k s_2 s_3 + {}^k \hat{\Omega} M_{23} - {}^k M_{10} \hat{\Omega} = i ({}^k M_{30} M_{31} - {}^k M_{31} M_{30}), \\
 \gamma^2 \gamma^3 (43) \quad & {}^k s_2 s_3 - {}^k s_2 s_3 + {}^k M_{12} M_{31} + {}^k M_{20} M_{30} = i ({}^k M_{23} \hat{\Omega} - {}^k \hat{\Omega} M_{23}), \\
 \gamma^{[34]} \gamma^{[12]} (44) \quad & {}^k s_2 s_3 - {}^k s_2 s_3 + {}^k M_{31} M_{12} + {}^k M_{30} M_{20} = i ({}^k M_{10} \hat{\Omega} - {}^k \hat{\Omega} M_{10}), \\
 \gamma^{[12]} \gamma^{[31]} (45) \quad & {}^k s_2 s_3 - {}^k s_2 s_3 + {}^k M_{12} M_{31} + {}^k M_{30} M_{20} = -i ({}^k s_1 s_0 - {}^k s_0 s_1), \\
 \gamma^{[24]} \gamma^{[24]} (46) \quad & {}^k s_2 s_3 - {}^k s_2 s_3 + {}^k M_{31} M_{12} + {}^k M_{20} M_{30} = -i ({}^k s_1 s_0 - {}^k s_0 s_1).
 \end{aligned}$$

G. Analog zu Gl. [I, (22), (41), (17) und (42)]:

$$\begin{aligned}
 \gamma^1 \gamma^{[24]} (47) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega} - {}^k M_{10} M_{23} - {}^k M_{31} M_{20} - {}^k M_{12} M_{30} = i ({}^k s_1 s_1 - {}^k s_1 s_1), \\
 \gamma^1 \gamma^1 (48) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega} + {}^k M_{10} M_{10} - {}^k M_{31} M_{31} - {}^k M_{12} M_{12} + {}^k s_1 s_1 - {}^k s_1 s_1 = 0, \\
 \gamma^{[24]} \gamma^{[24]} (49) \quad & {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega} + {}^k M_{23} M_{23} - {}^k M_{20} M_{20} - {}^k M_{30} M_{30} + {}^k s_1 s_1 - {}^k s_1 s_1 = 0, \\
 \gamma^{[24]} \gamma^{[14]} (50) \quad & -{}^k s_0 s_0 + {}^k s_1 s_1 + {}^k s_2 s_2 + {}^k s_3 s_3 = i ({}^k M_{23} M_{10} - {}^k M_{10} M_{23}), \\
 \gamma^{[23]} \gamma^{[23]} (51) \quad & -{}^k s_0 s_0 + {}^k s_1 s_1 + {}^k s_2 s_2 + {}^k s_3 s_3 - {}^k M_{23} M_{23} - {}^k M_{10} M_{10} = 0, \\
 \gamma^{[14]} \gamma^{[14]} (52) \quad & {}^k s_0 s_0 - {}^k s_1 s_1 - {}^k s_2 s_2 - {}^k s_3 s_3 - {}^k M_{23} M_{23} - {}^k M_{10} M_{10} = 0.
 \end{aligned}$$

Wenn später auf eine Identität Bezug genommen wird, welche aus einer der angeführten [Gl. (x)] durch Vertauschen von  $P$  und  $Q$  hervorgeht, so ist dies durch einen ' an der Gleichungsnummer [Gl. (x')] kenntlich gemacht. Gl. (x') geht aus Gl. (x) durch Verschieben des Index  $k$  vom ersten auf den zweiten Faktor unserer bilinearen Ausdrücke hervor.

## § 2. Anwendung der ersten Bilineargleichung auf die hintere Differentiation

Ausgehend von der Grundgleichung [I, (4)]

$$\sum_{k=1}^3 \gamma_{e\bar{e}}^k \gamma_{e\bar{e}}^k + \gamma_{e\bar{e}}^{[123]} \gamma_{e\bar{e}}^{[123]} = \delta_{e\bar{e}} \delta_{e\bar{e}} - \gamma_{e\bar{e}}^5 \gamma_{e\bar{e}}^5 - \gamma_{e\bar{e}}^4 \gamma_{e\bar{e}}^4 + \gamma_{e\bar{e}}^{[123]} \gamma_{e\bar{e}}^{[123]}$$

erhält man analog zu § 2 durch hintere Multiplikation mit den 4-reihigen Matrizen  $P_{\bar{\sigma}\sigma} Q_{\bar{\sigma}\sigma}$ , 4 Sätzen von 4 Funktionen  $q_{\sigma} Z_{\sigma} \xi_{\bar{\sigma}} \psi_{\bar{\sigma}}$  und Summation über alle Indizes  $\sigma, \bar{\sigma}, \bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{\bar{\sigma}}}, q, \bar{q}$  die Bilineargleichung in den inneren Produkten:

$$\sum_{k=1}^3 (q, \gamma^k P \chi)(\xi, \gamma^k Q \psi) + (q, \gamma^{[123]} P \chi)(\xi, \gamma^{[123]} Q \psi) = (\xi, P \chi)(q, Q \psi) - (\xi, \gamma^5 P \chi)(q, \gamma^5 Q \psi) - (\xi, \gamma^4 P \chi)(q, \gamma^4 Q \psi) + (\xi, \gamma^{[123]} P \chi)(q, \gamma^{[123]} Q \psi).$$

Im Sonderfalle  $q = \xi$  nimmt diese Gleichung einfachere Gestalt an und für  $q = \xi = \psi^+$  und  $\chi = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$  wird aus ihr

$$(*) \quad \sum_{j=1}^5 \left( \psi^+, \gamma^j P \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) (\psi^+, \gamma^j Q \psi) = \left( \psi^+, P \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) (\psi^+, Q \psi).$$

Der Vergleich mit Gl. (\*) für die vordere Differentiation zeigt, daß die beiden Gleichungen bis auf die Reihenfolge der Faktoren  $\gamma^j$  und  $P$  bzw.  $Q$  übereinstimmen. Da  $P$  und  $Q$  die 16 Matrizen des Diracschen Matrixrings durchlaufen, so gilt  $\gamma^j P = \pm P \gamma^j$ . Ob das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, wird dadurch bestimmt, daß  $P$  der Abteilung  $I$ ,  $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5$  oder der Restabteilung des Matrixrings angehört. Wenn  $Q$  (oder  $P$ ) eine der 6 Matrizen der ersten Abteilung ist, dann kommt unter  $\gamma^j Q$  sicher die Einheit vor, nämlich für  $Q = \gamma^j$ . Das zugehörige innere Produkt ist aber  $\Omega$ . Wenn  $Q$  (oder  $P$ ) zu den 10 Matrizen der Restabteilung gehört, dann kommt unter  $\gamma^j Q$  sicher nicht die Einheit vor, also fehlt auch das zugehörige innere Produkt  $\Omega$ . Das Vorkommen bzw. Nichtvorkommen von  $\Omega$  ist ein geeignetes Kriterium für die Vorzeichenwahl für jeden Faktor der bilinearen Ausdrücke beim Übergang von Gl. (\*) zu Gl. (\*\*): Ist  $\Omega$  vorhanden, so bleibt bei  $\Omega, \hat{\Omega}, s_0, s_1, s_2, s_3$  das Vorzeichen unverändert, während bei  $\hat{s}_0, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, M_{23}, M_{31}, M_{12}, M_{10}, M_{20}, M_{30}$  das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen ist; wenn  $\Omega$  fehlt, so behält umgekehrt die zweite Abteilung von Größen ihr Vorzeichen, während die erste es ändert. Dasselbe gilt auch für die Faktoren, die einen Differentialquotienten enthalten, nur wird gleichzeitig die vordere Differentiation durch hintere ersetzt, z. B. geht  ${}^k \hat{\Omega}$  in  $\hat{\Omega}^k$  über, wenn  ${}^k \Omega$  vorhanden ist und in  $-\hat{\Omega}^k$ , wenn  ${}^k \Omega$  fehlt. Bei Anwendung dieser Vorschrift auf Gl. (1)–(52) des letzten Paragraphen erkennt man, daß alle Glieder, die *explizit die imaginäre Einheit* enthalten, ihr Vorzeichen wechseln unter Festhaltung des Vorzeichens der übrigen Glieder. Dieses Verhalten ist von einem Übergang ins Konjugiert-

Komplexe wohl zu unterscheiden, denn die Hermiteizität der Diracmatrizen war nicht vorausgesetzt, also gilt

$$\left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}, A \psi \right)^* = \left( \psi^*, A^+ \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \neq \left( \psi^*, A \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right),$$

wobei  $A^+ = \overline{A}^*$  die Adjungierte von  $A$  ist und  $A$  eine Matrix aus dem vollen Diracschen Matrixring der  $\alpha$  bedeutet.

Sind dagegen die Matrizen  $\alpha$  hermiteisch, so ist  $A^+ = A$  und der Übergang von der vorderen zur hinteren Differentiation geschieht durch Übergang zum Konjugiert-Komplexen.

### § 3. Anwendung der zweiten Bilineargleichung

Nach [I, (12)–(14)] sind die 6 Matrizen  $B, B\gamma^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$ ) schiefssymmetrisch, die 10 Matrizen  $B\gamma^{[\mu\nu]}, B\gamma^{[2\mu\nu]}$  symmetrisch. Dies bedingt, daß die inneren Produkte

$$(53) \quad (\psi, B\psi) = 0 \quad \text{und} \quad (\psi, B\gamma^\mu \psi) = 0$$

sind, während sich über  $(\psi, B\gamma^{[\mu\nu]} \psi)$  und  $(\psi, B\gamma^{[2\mu\nu]} \psi)$  nichts einfaches aussagen läßt. (53) ermöglicht, ohne explizite Kenntnis der Matrix  $B$  eine teilweise Anwendung der zweiten Grundgleichung, indem man durch Bildung geeigneter innerer Produkte das  $B$  enthaltende Glied in Gl. [I, (10)] zum Verschwinden bringt. Die Diskussion der möglichen Fälle ergibt folgendes:

a) Die direkte Anwendung der Gl. [I, (10)], d. h. Multiplikation mit  $\psi_0, \psi_0, \frac{\partial \psi_0^+}{\partial x_k}, \psi_0^+$  bringt solange als  $\psi_0$  und  $\psi_0$  derselbe Satz von Funktionen sind, sowohl die linke als auch die rechte Seite identisch zum Verschwinden, denn die Vertauschung von  $q$  und  $\bar{q}$  ist dann bedeutungslos.

b) Die Multiplikation der Gl. [I, (10)] durch zwei 4reihige Matrizen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  aus dem Diracschen Matrixring dagegen, und die Bildung innerer Produkte mit Hilfe von 4 Sätzen von je 4 Funktionen  $\psi_0, \chi_0, \varphi_0, \xi_0$  ergibt

$$\begin{aligned} 2(\psi, B\Gamma\chi)(q, \Gamma'B^{-1}\xi) &= (\xi, \psi)(q, \Gamma'\Gamma\chi) - (q, \Gamma'\psi)(\xi, \Gamma\chi) \\ &+ (\xi, \gamma^5 \psi)(q, \Gamma'\gamma^5 \Gamma\chi) - (q, \Gamma'\gamma^5 \psi)(\xi, \gamma^5 \Gamma\chi) \\ &+ (\xi, \gamma^4 \psi)(q, \Gamma'\gamma^4 \Gamma\chi) - (q, \Gamma'\gamma^4 \psi)(\xi, \gamma^4 \Gamma\chi) \\ &- (\xi, \gamma^{[12]} \psi)(q, \Gamma'\gamma^{[123]} \Gamma\chi) + (q, \Gamma'\gamma^{[123]} \psi)(\xi, \gamma^{[123]} \Gamma\chi). \end{aligned}$$

Wenn einer der Operatoren  $\Gamma$  oder  $\Gamma'$  aus der Abteilung der 6 Matrizen  $I, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5$  gewählt wird, während der andere unbeschränkt bleiben kann, und dann entsprechend dieser Wahl  $\chi = \psi$  bzw.  $q = \xi$  gesetzt wird, verschwindet die linke Seite. So entsteht für  $\chi = \psi, q = \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \xi = \psi^+$ , wenn  $\Gamma$  eine der Matrizen  $I, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5$  bedeutet, die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= (\psi^+, \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \Gamma \psi \right) - \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \psi \right) (\psi^+, \Gamma \psi) \\
&+ (\psi^+, \gamma^5 \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^5 \Gamma \psi \right) - \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^5 \psi \right) (\psi^+, \gamma^5 \Gamma \psi) \\
&+ (\psi^+, \gamma^4 \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^4 \Gamma \psi \right) - \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^4 \psi \right) (\psi^+, \gamma^4 \Gamma \psi) \\
&- (\psi^+, \gamma^{[123]} \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^{[123]} \Gamma \psi \right) + \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^{[123]} \psi \right) (\psi^+, \gamma^{[123]} \Gamma \psi).
\end{aligned}$$

1. Wird  $\Gamma$  innerhalb der erlaubten Abteilung gleich  $I$ ,  $\gamma^4$ ,  $\gamma^5$  gesetzt, so zeigt sich nach Berechnung der entsprechenden Produkte, daß in diesen 3 Fällen auch die rechte Seite identisch verschwindet.

2. Bedeutet  $\Gamma$  eine der Matrizen  $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  so entsteht je eine nichttriviale Gleichung; z. B. für  $\Gamma = \gamma^1$ :

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned}
0 &= (\psi^+, \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^1 \psi \right) - \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \psi \right) (\psi^+, \gamma^1 \psi) \\
&+ i(\psi^+, \gamma^5 \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^{[234]} \psi \right) - i \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^5 \psi \right) (\psi^+, \gamma^{[234]} \psi) \\
&+ i(\psi^+, \gamma^4 \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^{[14]} \psi \right) - i \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^4 \psi \right) (\psi^+, \gamma^{[14]} \psi) \\
&- (\psi^+, \gamma^{[123]} \psi) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^{[23]} \psi \right) + \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, \Gamma' \gamma^{[123]} \psi \right) (\psi^+, \gamma^{[23]} \psi).
\end{aligned} \right.$$

Man kann jedoch zeigen, daß diese Gleichung auch aus der ersten Grundgleichung [I, (4)] in der Form [II § 1 Gl. (\*)] folgt, indem man dort die Wahl 1.  $Q = I$ ,  $P = \Gamma' \gamma^1$  und 2.  $Q = \gamma^{[23]}$ ,  $P = \Gamma' \gamma^{[123]}$  trifft. Subtraktion der dabei entstehenden 2 Gleichungen voneinander ergibt (54). Da  $\Gamma = \gamma^1$  eine in keiner Weise vor  $\Gamma = \gamma^2$ ,  $\Gamma = \gamma^3$  ausgezeichnete Wahl ist, so ist damit erwiesen, daß die zweite Bilineargleichung [I, (10)] keine weiteren, über die Ergebnisse der ersten [I, (4)] hinausgehenden Identitäten erzielen läßt, solange nur von den Symmetrieeigenschaften der Matrix  $B$  Gebrauch gemacht wird, ihre explizite Gestalt aber unbekannt ist.

#### § 4. Weitere Anwendungen der ersten Bilineargleichung

Vordere bzw. hintere Differentiation in beiden Faktoren. Anstatt in der Gl. (\*) vorhergehenden Gleichung  $\xi = \psi^+$  zu setzen, setze man  $\xi = \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}$  und erhält

$$(55) \quad \sum_{j=1}^5 \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, P \gamma^j \psi \right) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, Q \gamma^j \psi \right) = \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, P \psi \right) \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k}, Q \psi \right).$$

Wenn darin  $P$  und  $Q$  den Matrixring durchlaufen, entstehen dieselben algebraischen Identitäten für die vorn differenzierten Größen wie sie in I § 3 für die

undifferentierten angeführt wurden. Man erhält sie demnach durch Hinzufügen eines oberen Index  $k$  an alle in I § 3 stehenden Identitäten. 2 Beispiele sind:

$$(56) \quad ({}^k s_0)^2 - ({}^k s, {}^k s) = ({}^k \Omega)^2 + ({}^k \dot{\Omega})^2 \quad \text{für } P = Q = I,$$

$$(57) \quad ({}^k s_0)^2 - ({}^k s, {}^k s) = - ({}^k \Omega)^2 - ({}^k \dot{\Omega})^2 \quad \text{für } P = Q = \gamma^5.$$

Ebenso führt der Ersatz von  $\psi$  im zweiten Faktor von  $(**)$  durch  $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}$  zu einer analogen Gleichung für die hinten differentiierten Größen

$$(58) \quad \sum_{j=1}^5 \left( \psi^+, \gamma^j P \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \left( \psi^+, \gamma^j Q \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) = \left( \psi^+, P \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \left( \psi^+, Q \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right).$$

Analog zu dem zu Gl. (55) Gesagten entstehen aus (58) dieselben algebraischen Identitäten für die hinten differentiierten Größen wie sie aus (55) für die vorn differentiierten entsprungen. Man erhält sie, indem man an alle in I § 3 angeführten Identitäten einen hinteren, oberen Index  $k$  anbringt.

### § 5. Auflösung der algebraischen Identitäten für die vordere Differentiation

In den vorangehenden Paragraphen wurde eine große Anzahl von algebraischen Gleichungen aufgestellt, die zwischen den vorn (bzw. hinten) differentiierten und den undifferentierten Größen bestehen. Unser Ziel ist, die vorn (bzw. hinten) differentiierten Größen soweit wie möglich auf undifferentiierte Größen zurückzuführen, um bei späteren Anwendungen ihre Elimination vornehmen zu können.

Von dem Gleichungssystem, das in § 4 aufgestellt wurde, wissen wir, daß es dem Gleichungssystem I § 3 für die undifferentierten Größen vollkommen gleicht. Demnach versichert es uns, daß [analog zu I (18) und (19)] die Größen  ${}^k M$  und  ${}^k \dot{M}$  ganz durch die übrigen  ${}^k s_0$ ,  ${}^k s_0$ ,  ${}^k s$ ,  ${}^k \dot{s}$ ,  ${}^k \Omega$ ,  ${}^k \dot{\Omega}$  ausgedrückt werden können. Daher konzentriert sich unser Interesse auf die Bestimmung dieser übrigen Größen. Wir greifen also aus den Gleichungen der §§ 1 und 4 diejenigen heraus, die nur diese Größen enthalten und zwar so wenige wie möglich. Das Gleichungssystem (1)–(8), das nur die vorn differentiierten Größen  ${}^k s_0$ ,  ${}^k s$ ,  ${}^k \Omega$ ,  ${}^k \dot{\Omega}$  enthält und das Gleichungssystem (9)–(15), das nur die vorn differentiierten Größen  ${}^k s_0$ ,  ${}^k s$ ,  ${}^k \Omega$ ,  ${}^k \dot{\Omega}$  enthält, erfüllen diese Forderung.

Man kann natürlich nicht alle vorn differentiierten Größen auf undifferentiierte zurückführen. Zwei vorn differentiierte Größen  ${}^k \Omega$  und  ${}^k \dot{\Omega}$  sind nicht eliminierbar, so lange man nicht explizit davon Gebrauch macht, daß der Index  $k$  Differentiation bedeutet (§§ 5–8). Wenn man diese Tatsache benützt (§§ 9–11), dann läßt sich beim Zusammenfügen vorderer und hinterer Differentiation noch eine dieser Größen z. B.  $i({}^k \dot{\Omega} - \dot{\Omega}^k)$  eliminieren. Vorerst sehen wir die 14 vorn



differentiierten Größen  ${}^k s_0, {}^k \bar{s}, {}^k \dot{s}_0, {}^k \dot{\bar{s}}, {}^k \mathfrak{M}, {}^k \dot{\mathfrak{M}}$  also als *Unbekannte*, die 2 vorn differentiierten Größen  ${}^k \Omega, {}^k \dot{\Omega}$  und die 16 undifferentiierten Größen  $s_0, \bar{s}, \dot{s}_0, \dot{\bar{s}}, \mathfrak{M}, \dot{\mathfrak{M}}, \Omega, \dot{\Omega}$  als *Bekannte* in unseren Gleichungen an. In Komponenten gezählt haben wir für die 4 Unbekannten  ${}^k s_0, {}^k \bar{s} ({}^k s_1, {}^k s_2, {}^k s_3)$  16 lineare Gleichungen [Gl. (1)–(8)] und eine quadratische [Gl. (56)], die außer undifferentiierten Größen nur  ${}^k \Omega$  und  ${}^k \dot{\Omega}$  enthalten. Bei der Auflösung dieses Gleichungssystems zeigt es sich, daß die quadratische Gl. (56) aus den linearen folgt und daß von den 16 linearen Gl. (1)–(8) nur *drei* linear unabhängig sind, so daß trotz der Vielzahl der Gleichungen die *vier* Unbekannten nicht vollständig bestimmt werden können, sondern ein unbekannter Parameter  ${}^k \xi$  in den Lösungen verbleibt. Analog verhalten sich die 16 linearen Gleichungen [Gl. (9), (2'), (10)–(15)], die in § 1 als zweite Gruppe zusammengefaßt wurden, und die quadratische Gl. (57) in bezug auf die 4 Unbekannten  ${}^k \dot{s}_0, {}^k \dot{\bar{s}} ({}^k \dot{s}_1, {}^k \dot{s}_2, {}^k \dot{s}_3)$ . Auch bei ihnen verbleibt ein (zweiter) unbekannter Parameter  ${}^k \eta$  in den Lösungen. Die Parameter  ${}^k \xi, {}^k \eta$  lassen sich erst nach Zusammenfügung der vorn und hinten differentiierten Größen und aus der Eigenschaft des Index  $k$ , Differentiation zu bedeuten, bestimmen (§ 9).

A. *Auflösung der linearen Gl. (1)–(8) und der quadratischen Gl. (56).*

a) Beweis, daß Gl. (56) aus den Gl. (1), (3), (5), (7) folgt. Multipliziere (3) skalar mit  ${}^k \bar{s}$ , so ergibt sich

$${}^k s_0 ({}^k \bar{s}, \bar{s}) - ({}^k \bar{s}, {}^k \bar{s}) s_0 = i \{ {}^k \Omega ({}^k \bar{s}, \mathfrak{M}) - {}^k \dot{\Omega} ({}^k \bar{s}, \mathfrak{M}) \},$$

woraus unter Anwendung von (1), (5) und (7) die Gl. (56) folgt.

b) Beweis, daß Gl. (5) aus den Gl. (1)–(4) folgt. Multipliziere (3) skalar mit  $s_0 \mathfrak{M}$  und (4) mit  $- \dot{s}_0 \mathfrak{M}$  und addiere, so ergibt sich

$$\begin{aligned} - (s_0^2 - \dot{s}_0^2) ({}^k \bar{s}, \mathfrak{M}) &= i s_0 \dot{\Omega} ({}^k \bar{s}, \bar{s}) - i \dot{s}_0 \dot{\Omega} ({}^k \bar{s}, \bar{s}) \\ &\quad - {}^k \Omega \{ \dot{s}_0 (s_0^2 - \dot{s}_0^2 - \dot{\Omega}^2) - i s_0 \Omega \dot{\Omega} \} \\ &\quad - {}^k \dot{\Omega} \{ i s_0 (s_0^2 - \dot{s}_0^2 - \dot{\Omega}^2) + \dot{s}_0 \Omega \dot{\Omega} \}. \end{aligned}$$

Daraus folgt (5) unter Anwendung von (1) und (2), da im allgemeinen

$$s_0^2 - \dot{s}_0^2 \neq 0.$$

c) Beweis, daß Gl. (7) aus den Gl. (1)–(4) folgt. Bei der Multiplikation von (3) mit  $- i s_0 \mathfrak{M}$  ergibt sich unter Benutzung von (1)

$$\dot{s}_0 ({}^k \bar{s}, \mathfrak{M}) = - i s_0 ({}^k \bar{s}, \mathfrak{M}) + {}^k s_0 (i \dot{s}_0 \Omega + s_0 \dot{\Omega}) - {}^k \dot{\Omega} (s_0^2 - \dot{s}_0^2),$$

eine Gleichung, die (7) mit (5) verbindet. Einsetzen von (5), das nach b) aus den Gl. (1)–(4) folgt, erweist auch (7) als eine Folge von (1) bis (4).

d) Beweis, daß Gl. (6) und (8) aus den Gl. (1)–(4) folgen. Man multipliziere Gl. (3) mit  $- i s_0$  und außerdem vektoriell mit  $-\dot{\bar{s}}$ ,

ferner Gl. (4) mit  $i\hat{s}_0$  und außerdem vektoriell mit  $\hat{s}$ , addiere alle vier Produkte, so erhält man unter Verwendung von (1) und (2) und den algebraischen Identitäten [I, (15), (16), (29)–(32)]

$$(59) \quad \begin{cases} {}^k s_0 [\hat{s}, \hat{s}] - [{}^k \hat{s}, s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \hat{s}] = i {}^k \hat{s} (\hat{\Omega}^2 + \hat{\Omega}^2) \\ \quad - {}^k \hat{\Omega} (i \hat{s} \hat{\Omega} + \hat{s} \hat{\Omega}) + {}^k \hat{\Omega} (-i \hat{s} \hat{\Omega} + \hat{s} \hat{\Omega}). \end{cases}$$

Andererseits multipliziere man Gl. (1) mit  $\hat{s}$ , Gl. (2) mit  $-\hat{s}$  und addiere, so entsteht

$$(60) \quad {}^k s_0 (s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \hat{s}) + [{}^k \hat{s}, [\hat{s}, \hat{s}]] = {}^k \hat{\Omega} (\hat{s} \hat{\Omega} - i \hat{s} \hat{\Omega}) + {}^k \hat{\Omega} (\hat{s} \hat{\Omega} + i \hat{s} \hat{\Omega}).$$

Unter Verwendung der algebraischen Identitäten [I, (18 und (19)] ergibt Multiplikation von (59) mit  $-\hat{\Omega}$ , von (60) mit  $\hat{\Omega}$  und Addition Gl. (6), während Multiplikation von (59) mit  $\hat{\Omega}$ , von (60) mit  $\hat{\Omega}$  und Addition zu Gl. (8) führt.

Damit ist gezeigt, daß die Gl. (56) und (5)–(8) aus den Gl. (1)–(4) folgen, so daß die Auflösung von (1)–(4) nunmehr allein übrigbleibt.

e) Auflösung der Gl. (1)–(4). Diese Gleichungen werden durch den Ansatz

$$(61) \quad \begin{cases} {}^k s_0 = {}^k A s_0 - i {}^k B \hat{s}_0 + {}^k \xi q_0, \\ {}^k \hat{s} = {}^k A \hat{s} - i {}^k B \hat{s} + {}^k \xi q \end{cases}$$

mit

$$(62) \quad {}^k A = \frac{1}{\hat{\Omega}^2 + \hat{\Omega}^2} ({}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega} + {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega}), \quad {}^k B = \frac{1}{\hat{\Omega}^2 + \hat{\Omega}^2} ({}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega} - {}^k \hat{\Omega} \hat{\Omega})$$

und einem beliebigen Parameter  ${}^k \xi$  befriedigt, derart, daß für die neuen Unbekannten  $q_0$  und  $q(q_1, q_2, q_3)$  nun homogene lineare Gleichungen übrigbleiben. Man kann also  $q_0 = 1$  setzen und erhält für  $q$  die Gleichungen

$$(63) \quad \begin{cases} \text{a)} & (\hat{s}, q) = s_0, \\ \text{b)} & (\hat{s}, q) = \hat{s}_0, \\ \text{c)} & s_0 q - \hat{s} = -i [\hat{s}, q], \\ \text{d)} & \hat{s}_0 q - \hat{s} = -i [\hat{s}, q]. \end{cases}$$

Durch vektorielle Multiplikation von (63d) mit  $\hat{s}$  und unter Verwendung von (63a, d) und der Identität [I, (15)] oder durch vektorielle Multiplikation von (63c) mit  $\hat{s}$  unter Verwendung von (63b, c) und der Identität [I, 16] erhält man jeweils

$$(64) \quad q = \frac{s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \hat{s} + i [\hat{s}, \hat{s}]}{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - (\hat{\Omega}^2 + \hat{\Omega}^2)}.$$

$q$  ist ein komplexer Einheitsvektor (im Dreidimensionalen), mit  $q_0 = 1$  zusammen ein komplexer Nullvektor (im Vierdimensionalen): es gilt

$\sum_{i=1}^3 q_i^2 = 1$ , wie man unter Benützung zweier Formeln aus [1, (36)]

und der Tatsache, daß  $(s_0 \bar{s} - \hat{s}_0 \hat{\bar{s}}, [\bar{s}, \hat{s}]) = 0$  ist, erkennt.

B. Ganz analog findet man für  ${}^k\hat{s}_0, {}^k\hat{s}({}^k\hat{s}_1, {}^k\hat{s}_2, {}^k\hat{s}_3)$  aus der zweiten Gruppe von 16 linearen Gleichungen § 1 Gl. (9), (2'), (10)–(15) und der quadratischen Gleichung § 4 Gl. (57) die Lösung

$$(65) \quad \begin{cases} {}^k\hat{s}_0 = {}^kA \hat{s}_0 - i {}^kB \hat{s}_0 + {}^k\eta, \\ {}^k\hat{s} = {}^kA \hat{s} - i {}^kB \hat{s} + {}^k\eta q \end{cases}$$

mit derselben Bedeutung (62) von  ${}^kA$  und  ${}^kB$ , dem zweiten beliebigen Parameter  ${}^k\eta$  und dem gleichen Vektor  $q$  (64).

### § 6. Auflösung der algebraischen Identitäten für die hintere Differentiation

Für die hinten differenzierten Größen bestehen (§ 2) Gleichungen, die aus denen für die vorne differenzierten entstehen, wenn alle explizit auftretenden  $i$  durch  $-i$  ersetzt werden. Man erhält durch denselben Prozeß auch aus den Lösungen für die vordere die Lösungen für die hintere Differentiation. Die bei diesem Übergang den  ${}^k\xi$  und  ${}^k\eta$  entsprechenden unbekannten Parameter seien  $\xi^k$  und  $\eta^k$ , während der Vektor  $p$  genannt werde, der durch Ändern des Vorzeichens von  $i$  in  $q$  entsteht. Dann kann man die entsprechenden Gleichungen für die hintere Differentiation lösen durch

$$(66) \quad \begin{cases} \hat{s}_0^k = A^k \cdot s_0 + i B^k \cdot \hat{s}_0 + \xi^k, \\ \hat{s}^k = A^k \cdot \bar{s} + i B^k \cdot \hat{s} + \xi^k \cdot p, \end{cases} \quad (67) \quad \begin{cases} \hat{s}_0^k = A^k \cdot \hat{s}_0 + i B^k \cdot s_0 + \eta^k, \\ \hat{s}^k = A^k \cdot \hat{s} + i B^k \cdot \bar{s} + \eta^k \cdot p. \end{cases}$$

mit

$$(68) \quad A^k = \frac{1}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} (\Omega^k \cdot \Omega + \hat{\Omega}^k \cdot \hat{\Omega}), \quad B^k = \frac{1}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} (\Omega^k \cdot \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k \cdot \Omega)$$

und

$$(69) \quad p = \frac{s_0 \bar{s} - \hat{s}_0 \hat{\bar{s}} - i [\bar{s}, \hat{s}]}{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)}.$$

Für hermitesche Diracmatrizen wären  $A^k = ({}^kA)^*$ ,  $B^k = ({}^kB)^*$ ,  $p = q^*$ ,  $\xi^k = ({}^k\xi)^*$ ,  $\eta^k = ({}^k\eta)^*$ ; im allgemeinen Fall nicht, da dann  $s_0, \hat{s}_0, \bar{s}, \hat{s}$  usw. nicht reell sind. Im allgemeinen Fall findet der Übergang von vorderer zu hinterer Differentiation durch Vorzeichenänderung der explizit auftretenden  $i$ , Ersetzen von  $q$  durch  $p$  und Verlagern des oberen Index von vorn nach hinten statt.

Nun fehlen noch die Lösungen für  ${}^k\mathcal{M}$ ,  ${}^k\mathcal{N}$  bzw.  $\mathcal{M}^k$ ,  $\mathcal{N}^k$ , die wir in § 8 gewinnen werden.

### § 7. Einiges Bemerkenswerte über die komplexen Vektoren $p$ und $q$

Die komplexen Einheitsvektoren  $p$  und  $q$  erlauben in Komponenten geschrieben die bemerkenswerte Umformung

$$\left. \begin{matrix} q_1 \\ p_1 \end{matrix} \right\} = \frac{s_0 s_1 - \hat{s}_0 \hat{s}_1 \pm i (s_2 s_3 - \hat{s}_2 \hat{s}_3)}{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \Omega^2 - \hat{\Omega}^2} = \frac{s_0 \hat{s}_2 - \hat{s}_0 s_2 \pm i (s_3 s_1 - \hat{s}_3 \hat{s}_1)}{s_1 s_2 - \hat{s}_1 \hat{s}_2 \pm i (s_0 s_3 - \hat{s}_0 \hat{s}_3)}.$$

Dabei gehören die oberen Vorzeichen jeweils zu  $q_1$ , die unteren zu  $p_1$ . ( $q_2, q_3, p_2, p_3$  erhält man durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3.) Wir erwähnen außer (63) folgende Formeln, die in III und IV teilweise zur Anwendung kommen werden:

$$(70) \quad \begin{cases} \text{a) } [\mathfrak{M}, q] = -\mathfrak{M} + i \mathfrak{L} q, & \text{e) } (q, q) = (p, p) = 1, \\ \text{b) } [\mathfrak{M}, q] = \mathfrak{M} + i \mathfrak{L} q, & \text{f) } (p, q) = \frac{s_0^2 - \hat{s}_0^2 + \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}^2}{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}^2)}, \\ \text{c) } (\mathfrak{M}, q) = -i \mathfrak{L}, & \\ \text{d) } (\mathfrak{M}, q) = i \mathfrak{L}, & \end{cases}$$

Die letzte folgt aus

$$(71) \quad \hat{s}_k^2 - s_k^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2 = -p_k q_k (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2) \quad k = 1, 2, 3.$$

Ferner gelten

$$(72) \quad s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 s = \frac{i}{2} (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2) [p, q],$$

$$(73) \quad [\hat{s}, \hat{s}] = \frac{i}{2} (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2) (p - q),$$

$$(74) \quad s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 s = \frac{1}{2} (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2) (p + q),$$

$$(75) \quad s_1 s_2 - \hat{s}_1 \hat{s}_2 = \frac{1}{2} (s_0^2 - \hat{s}_0^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2) (q_1 p_2 + p_1 q_2).$$

#### § 8. Übereinstimmung von Lösungen, die auf verschiedenen Wegen gewonnen werden

Nachdem die Lösungen für  $k_{s_0}, k_{\hat{s}}, k_{s'_0}, k_{\hat{s}}$  gefunden sind (§ 5), lassen sich die übrigen Größen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}$ , die wir als Unbekannte betrachten, berechnen. Infolge der Mannigfaltigkeit der Gleichungen der §§ 1 und 4 kann man diesen Lösungen verschiedene Formen geben und deren Gleichwertigkeit nachweisen.

A. Wir finden  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}$  zunächst in zwei Formen, in der sie auf die Größen  $k_{s_0}, k_{\hat{s}}, k_{s'_0}, k_{\hat{s}}$  zurückgeführt sind. Dazu eliminieren wir  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{M}$  aus den Gleichungen

$$(11) \quad \mathfrak{M} \hat{\Omega} - \mathfrak{M} \Omega = i (k_{s'_0} \hat{s} - k_{\hat{s}} s_0) - [k_{\hat{s}}, \hat{s}]$$

und

$$(4') \quad \mathfrak{M} \Omega + \mathfrak{M} \hat{\Omega} = - (k_{s'_0} \hat{s} - k_{\hat{s}} s_0) - i [k_{\hat{s}}, \hat{s}]$$

und erhalten eine erste Form

$$(76) \quad \begin{cases} \mathfrak{M} (\Omega^2 + \mathfrak{L}^2) = \Omega \{ (s_0 k_{\hat{s}} - k_{s'_0} \hat{s}) + i [\hat{s}, k_{\hat{s}}] \} \\ \quad - \hat{\Omega} [k_{\hat{s}}, \hat{s}] + i (s'_0 k_{\hat{s}} - k_{s'_0} \hat{s}), \\ \mathfrak{M} (\Omega^2 + \mathfrak{L}^2) = \hat{\Omega} \{ (s_0 k_{\hat{s}} - k_{s'_0} \hat{s}) + i [\hat{s}, k_{\hat{s}}] \} \\ \quad + \Omega [k_{\hat{s}}, \hat{s}] + i (s'_0 k_{\hat{s}} - k_{s'_0} \hat{s}). \end{cases}$$

Die zweite Form enthält Glieder mit und ohne die imaginäre Einheit in einer Mischung, die für eine spätere Anwendung (§ 10)

geeigneter ist. Man erhält sie, wenn man in (76) die Größen  $[\hat{k}_3, \hat{s}]$  und  $s_0 \hat{k}_3 - \hat{k}_{s_0} \hat{s}$  mit Hilfe der Gl. (3) und (10) beseitigt. Sie lautet

$$(77) \quad \begin{cases} {}^k\mathfrak{M}(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) = ({}^k\Omega \Omega + {}^k\hat{\Omega} \hat{\Omega}) {}^k\mathfrak{M} + ({}^k\hat{\Omega} \Omega - {}^k\Omega \hat{\Omega}) {}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega} \\ \quad + i \Omega \{[\hat{s}, {}^k\hat{s}] - [\hat{s}, {}^k\hat{s}]\} \\ \quad + i \hat{\Omega} (s_0 {}^k\hat{s} - {}^k_{s_0} \hat{s} + {}^k_{s_0} \hat{s} - \hat{s}_0 {}^k\hat{s}), \\ {}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega}(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) = ({}^k\Omega \Omega + {}^k\hat{\Omega} \hat{\Omega}) {}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega} + ({}^k\hat{\Omega} \Omega - {}^k\Omega \hat{\Omega}) {}^k\mathfrak{M} \\ \quad + i \hat{\Omega} \{[\hat{s}, {}^k\hat{s}] - [\hat{s}, {}^k\hat{s}]\} \\ \quad - i \Omega (s_0 {}^k\hat{s} - {}^k_{s_0} \hat{s} + {}^k_{s_0} \hat{s} - \hat{s}_0 {}^k\hat{s}). \end{cases}$$

Man erkennt an dieser Form, daß  ${}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega}$  aus  ${}^k\mathfrak{M}$  hervorgeht, wenn man  $\Omega$  durch  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{\Omega}$  durch  $-\Omega$ ,  ${}^k\Omega$  durch  ${}^k\hat{\Omega}$  und  ${}^k\hat{\Omega}$  durch  $-{}^k\Omega$  ersetzt.

B. In (76) und (77) enthalten  ${}^k\mathfrak{M}$  und  ${}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega}$  noch  ${}^k_{s_0}$ ,  ${}^k\hat{s}$ ,  ${}^k_{s_0}$ ,  ${}^k\hat{s}$ . Wenn man die Ansätze (61) und (65) für diese Größen in (76) einführt, so erhält man für  ${}^k\mathfrak{M}$  und  ${}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega}$  Darstellungen in einer zu (61) und (65) analogen Form. In dieser bleiben dann nur noch die (nach unserer in § 5 gewählten Einteilung) „bekannten“ Größen  ${}^k\Omega$  und  ${}^k\hat{\Omega}$  und die unbestimmten Parameter  ${}^k\xi$  und  ${}^k\eta$  zurück. Nach Berücksichtigung der Identitäten [I (34) und (35)] und den Definitionen (62) für  ${}^kA$  und  ${}^kB$  ergibt sich dabei

$$(78) \quad \begin{cases} {}^k\mathfrak{M} = {}^kA \mathfrak{M} + {}^kB \mathfrak{M}\hat{\Omega} + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} \{({}^k\xi \hat{s} - {}^k\eta \hat{s}) - q({}^k\xi \hat{s}_0 - {}^k\eta s_0)\} \\ \quad - \frac{\hat{\Omega}^2}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} [q, ({}^k\xi \hat{s} - {}^k\eta \hat{s})], \\ {}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega} = {}^kA \mathfrak{M}\hat{\Omega} - {}^kB \mathfrak{M} + \frac{\hat{\Omega}^2}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} \{({}^k\xi \hat{s} - {}^k\eta \hat{s}) - q({}^k\xi \hat{s}_0 - {}^k\eta s_0)\} \\ \quad + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2} [q, ({}^k\xi \hat{s} - {}^k\eta \hat{s})]. \end{cases}$$

Während in den Lösungen für  ${}^k_{s_0}$ ,  ${}^k\hat{s}$  nur der unbestimmte Parameter  ${}^k\xi$  und in den Lösungen für  ${}^k_{s_0}$ ,  ${}^k\hat{s}$  nur  ${}^k\eta$  auftrat, kommen sie in  ${}^k\mathfrak{M}$  und  ${}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega}$  beide zusammen vor. Diese Darstellung ist also für  ${}^k\mathfrak{M}$  und  ${}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega}$  weniger einfach.

C. Schließlich ergab § 4 eine der algebraischen Identität [I (18)] bzw. [I (19)] analoge Darstellungsweise von  ${}^k\mathfrak{M}$  bzw.  ${}^k\mathfrak{M}\hat{\Omega}$ . Z. B. gilt danach für  ${}^k\mathfrak{M}$

$$(79) \quad {}^k\mathfrak{M} \{({}^k\Omega)^2 + ({}^k\hat{\Omega})^2\} = {}^k\Omega ({}^k_{s_0} {}^k\hat{s} - {}^k_{s_0} {}^k\hat{s}) - {}^k\hat{\Omega} [{}^k\hat{s}, {}^k\hat{s}].$$

Übereinstimmung von (79) mit (78) kann man feststellen, indem man in (79) die Lösungen (61) und (65) für  ${}^k_{s_0}$ ,  ${}^k\hat{s}$ ,  ${}^k_{s_0}$ ,  ${}^k\hat{s}$  einsetzt, das dann explizit auftretende  $i$  mit Hilfe der Gl. (63c und d) beseitigt und beachtet, daß

$$(80) \quad \begin{cases} ({}^k A)^2 + ({}^k B)^2 = \frac{({}^k \Omega)^2 + ({}^k \hat{\Omega})^2}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2}, & {}^k \Omega {}^k A + {}^k \hat{\Omega} {}^k B = \Omega \frac{({}^k \Omega)^2 + ({}^k \hat{\Omega})^2}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2}, \\ {}^k \Omega {}^k B + {}^k \hat{\Omega} {}^k A = \hat{\Omega} \frac{({}^k \Omega)^2 + ({}^k \hat{\Omega})^2}{\Omega^2 + \hat{\Omega}^2}. \end{cases}$$

Für die hinten differenzierten Größen  $\mathfrak{M}^k$  und  $\hat{\mathfrak{M}}^k$  gelten zu (76)–(78) analoge Formeln. Man versetze, um sie zu erhalten, alle oberen Indizes von vorn nach hinten, ändere das Vorzeichen aller explizit auftretenden  $i$  und ersetze  $q$  durch  $p$ .

#### § 9. Bestimmung der Parameter $\xi$ und $\eta$ und Vervollständigung der Lösungen

Bisher wurde von der Tatsache, daß der obere Index  $k$  Differentiation nach  $x_k$  bedeutet, kein Gebrauch gemacht. Er war bisher ein reiner Bezeichnungsindex und hätte genau so gut Ersetzen von  $\eta$  durch eine beliebige Funktion  $q$  statt durch  $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}$  bedeuten können. Erinnern seiner Bedeutung ermöglicht die Bestimmung der bisher unbestimmten Parameter  ${}^k \xi$ ,  $\xi^k$ ;  ${}^k \eta$ ,  $\eta^k$  in den Lösungen (61), (65), (66), (67) und (78).

A. Man erhält durch Kombination von Gl. (3) für die vordere mit der entsprechenden für die hintere Differentiation

$$i({}^k \hat{s} - \hat{s}^k) = \frac{1}{s_0} \left\{ \hat{s} \cdot i({}^k s_0 - s_0^k) + \left[ \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] - \mathfrak{M} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} + \hat{\mathfrak{M}} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} \right\}.$$

Führt man diesen Ausdruck in die ebenso ergänzte Gl. (1)

$$s_0 \cdot i({}^k s_0 - s_0^k) - (\hat{s}, i({}^k \hat{s} - \hat{s}^k)) = \Omega \cdot i({}^k \Omega - \Omega^k) + \hat{\Omega} \cdot i({}^k \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k)$$

ein, so wird unter Berücksichtigung von [I, (15), (25), (27)]

$$\begin{aligned} (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) \cdot i({}^k s_0 - s_0^k) &= s_0 \{ \Omega \cdot i({}^k \Omega - \Omega^k) + \hat{\Omega} \cdot i({}^k \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \} \\ &\quad + \hat{s}_0 \left( \hat{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} \right) + ([\hat{s}, \hat{s}], \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k}). \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus den Lösungen (61) und (66):

$$\begin{aligned} (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) \cdot i({}^k s_0 - s_0^k) &= s_0 \{ \Omega \cdot i({}^k \Omega - \Omega^k) + \hat{\Omega} \cdot i({}^k \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \} \\ &\quad + \hat{s}_0 \left( \hat{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} \right) + (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) \cdot i({}^k \xi - \xi^k). \end{aligned}$$

Vergleich beider Ausdrücke ergibt den Imaginärteil von  ${}^k \xi$ :

$$(81) \quad \boxed{(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) \cdot i({}^k \xi - \xi^k) = ([\hat{s}, \hat{s}], \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k})}.$$

B. Die Summe  ${}^k s_0 + s_0{}^k = \frac{\partial s_0}{\partial x_k}$  läßt sich ebenfalls mit Hilfe der Lösungen (61) und (66) zusammenfügen:

$$(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2) \frac{\partial s_0}{\partial x_k} = \left( \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} + \hat{\Omega} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} \right) s_0 - \{ \hat{\Omega} \cdot i({}^k \Omega - \Omega^k) - \Omega \cdot i({}^k \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \} \hat{s}_0 + (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)({}^k \xi + \xi^k).$$

Andererseits erhält man aus der durch die hintere Differentiation ergänzten Gl. (2)

$$\hat{\Omega} \cdot i({}^k \Omega - \Omega^k) - \Omega \cdot i({}^k \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) = \hat{s}_0 \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \left( \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right),$$

die man oben einführt, für den Realteil von  ${}^k \xi$ :

$$(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)({}^k \xi + \xi^k) = (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2 + s_0^2) \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - s_0 \left( \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} + \hat{\Omega} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} \right) - \hat{s}_0 \left( \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right).$$

Dabei wurde von der Abkürzung

$$(82) \quad \left( \mathfrak{A}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_k} \right) = A_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_k} + A_2 \frac{\partial B_2}{\partial x_k} + A_3 \frac{\partial B_3}{\partial x_k} = [\mathfrak{A}, \text{rot } \mathfrak{B}]_k + (\mathfrak{A} \text{ grad } \mathfrak{B})_k$$

Gebrauch gemacht. Der Realteil von  ${}^k \xi$  läßt sich unter Benützung der nach  $x_k$  differenzierten Identität [I, (15)] folgendermaßen schreiben:

$$(83) \quad (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)({}^k \xi + \xi^k) = (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2 + s_0^2 - s_0^2) \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \left( s_0 \hat{s} - \hat{s}_0 \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right).$$

C. Aus (81) und (83) folgen unter Erinnerung an die Bedeutung (64) und (69) der Vektoren  $q$  und  $p$  für die Parameter  ${}^k \xi$  und  $\xi^k$

$$(84) \quad \begin{cases} {}^k \xi = \frac{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)}{2(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)} \left\{ - \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \left( p, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right) \right\}, \\ \xi^k = \frac{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)}{2(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)} \left\{ - \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \left( q, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right) \right\}. \end{cases}$$

Auf einem ganz analogen Weg lassen sich auch  ${}^k \eta$  und  $\eta^k$  aus den durch die hintere Differentiation ergänzten Gl. (11), (9) und (2') unter Anwendung der Identitäten [I, (16), (26), (28)] berechnen: man erhält

$$(85) \quad \begin{cases} {}^k \eta = \frac{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)}{2(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)} \left\{ - \frac{\partial \hat{s}_0}{\partial x_k} + \left( p, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right) \right\}, \\ \eta^k = \frac{s_0^2 - \hat{s}_0^2 - (\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)}{2(\Omega^2 + \hat{\Omega}^2)} \left\{ - \frac{\partial \hat{s}_0}{\partial x_k} + \left( q, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right) \right\}. \end{cases}$$

Einsetzen von  ${}^k \xi$ ,  $\xi^k$ ,  ${}^k \eta$ ,  $\eta^k$  in die Formeln (61), (65), (66), (67) und (78) vervollständigt die Lösungen  ${}^k s_0$ ,  ${}^k \hat{s}$ ,  ${}^k \hat{s}_0$ ,  ${}^k \hat{s}$ ,  ${}^k \mathfrak{M}$ ,  ${}^k \mathfrak{M}$ . In den vervollständigten Lösungen treten außer deutbaren Größen nur noch zwei undeutbare  ${}^k \Omega$  und  ${}^k \hat{\Omega}$  auf.



Die angegebenen Lösungen befriedigen die ganze Liste von Gl. (1)–(52). Sie enthält keine algebraische Identität, die nicht auf die bisher erwähnten zurückführbar wäre.

#### § 10. Zurückführung der undeutbaren Größen auf deutbare

Die Ergebnisse der vorangehenden Paragraphen ermöglichen, alle undeutbaren Größen  $i^{(k)}(s_0 - s_0^{(k)})$ ,  $i^{(k)}(\bar{s} - \bar{s}^{(k)})$ ,  $i^{(k)}(\dot{s}_0 - \dot{s}_0^{(k)})$ ,  $i^{(k)}(\dot{\bar{s}} - \dot{\bar{s}}^{(k)})$ ,  $i^{(k)}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}^{(k)})$ ,  $i^{(k)}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}^{(k)})$ ,  $i^{(k)}(\Omega - \Omega^{(k)})$ ,  $i^{(k)}(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}^{(k)})$  auf eine einzige z. B.  $i^{(k)}(\Omega - \Omega^{(k)})$  zurückzuführen. Mit der Bezeichnung

$$(86) \quad U_k = \Omega \cdot i^{(k)}(\Omega - \Omega^{(k)}) + \dot{\Omega} \cdot i^{(k)}(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}^{(k)})$$

läßt sich unter Beibehaltung von zwei undeutbaren Größen den übrigen folgende Darstellung geben:

$$\begin{aligned} (87) \quad i^{(k)}(s_0 - s_0^{(k)})(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) &= s_0 U_k + \dot{s}_0 \left( \dot{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial x_k} \right) + \left( [\bar{s}, \dot{\bar{s}}], \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right), \\ (88) \quad i^{(k)}(\bar{s} - \bar{s}^{(k)})(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) &= \bar{s} U_k + \dot{\bar{s}} \left( \dot{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial x_k} \right) + [\bar{s}, \dot{\bar{s}}] \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \left[ s_0 \dot{\bar{s}} - \dot{s}_0 \bar{s}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right], \\ (89) \quad i^{(k)}(\dot{s}_0 - \dot{s}_0^{(k)})(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) &= \dot{s}_0 U_k + s_0 \left( \dot{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial x_k} \right) + \left( [\bar{s}, \dot{\bar{s}}], \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} \right), \\ (90) \quad i^{(k)}(\dot{\bar{s}} - \dot{\bar{s}}^{(k)})(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) &= \dot{\bar{s}} U_k + \bar{s} \left( \dot{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial x_k} \right) + [\bar{s}, \dot{\bar{s}}] \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k} + \left[ s_0 \dot{\bar{s}} - \dot{s}_0 \bar{s}, \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} \right], \\ (91) \quad i^{(k)}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}^{(k)})(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) &= \mathfrak{M} U_k + \mathfrak{M} \left\{ s_0 \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k} - \left( \bar{s}, \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} \right) \right\} - \Omega \left( [\bar{s}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k}] - \left[ \dot{\bar{s}}, \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} \right] \right) \\ &\quad - \dot{\Omega} \left( s_0 \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} - \dot{s}_0 \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} - \bar{s} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \dot{\bar{s}} \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k} \right), \\ (92) \quad i^{(k)}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}^{(k)})(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) &= \mathfrak{M} U_k + \mathfrak{M} \left\{ \dot{s}_0 \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \left( \dot{\bar{s}}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right) \right\} - \dot{\Omega} \left( [\bar{s}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k}] - \left[ \dot{\bar{s}}, \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} \right] \right) \\ &\quad + \Omega \left( s_0 \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} - \dot{s}_0 \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} - \bar{s} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \dot{\bar{s}} \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Diese Schreibweise hat den Vorteil der Symmetrie gegenüber der, die man erhält, wenn man schließlich von der außerdem noch bestehenden Beziehung

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} &\dot{\Omega} \cdot i^{(k)}(\Omega - \Omega^{(k)}) - \Omega \cdot i^{(k)}(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}^{(k)}) \\ &= \dot{s}_0 \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \left( \dot{\bar{s}}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right) = -s_0 \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k} + \left( \bar{s}, \frac{\partial \dot{\bar{s}}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \right.$$

Gebrauch macht, um aus (87)–(92) z. B.  $i^{(k)}(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}^{(k)})$  zu eliminieren. Man erkennt daraus jedoch, daß es möglich ist, alle undeutbaren Größen auf eine einzige zurückzuführen.

*Herleitung der Gl. (87)–(93).* Die Gl. (87)–(90) erhält man aus den Lösungen (61) und (66), (65) und (67) durch Zusammenfügen der entsprechenden, vorn und hinten differenzierten Größen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß

$$\begin{aligned}
 & i({}^k A - A^k)(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) = U_k, \quad ({}^k B + B^k)(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) = \dot{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial x_k}, \\
 & i({}^k \xi - \xi^k)(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) = \left( [\bar{s}, \hat{s}], \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right), \\
 (94) \quad & i({}^k \xi q - p \xi^k)(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) = [\bar{s}, \hat{s}] \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \left[ s_0 \hat{s} - \dot{s}_0 \bar{s}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right], \\
 & i({}^k \eta - \eta^k)(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) = \left( [\bar{s}, \hat{s}], \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right), \\
 & i({}^k \eta q - p \eta^k)(\Omega^2 + \dot{\Omega}^2) = [\bar{s}, \hat{s}] \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k} + \left[ s_0 \hat{s} - \dot{s}_0 \bar{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right]
 \end{aligned}$$

ist. Es besteht Übereinstimmung mit Ausdrücken, die man aus den Kombinationen undeutbarer Größen im nächsten Paragraphen erhalten kann. Z. B. ergibt sich (87) durch Multiplikation von [§ 11, Gl. (7)] mit  $\Omega$ , [§ 11, Gl. (14)] mit  $\dot{\Omega}$  und Addition, (88) durch Multiplikation von [§ 11, Gl. (8)] mit  $\Omega$ , [§ 11, Gl. (6)] mit  $\dot{\Omega}$  und Addition, (89) durch Multiplikation von [§ 11, Gl. (14)] mit  $\Omega$ , [§ 11, Gl. (12)] mit  $\dot{\Omega}$  und Addition, (90) durch Multiplikation von [§ 11, Gl. (15)] mit  $\Omega$ , [§ 11, Gl. (13)] mit  $\dot{\Omega}$  und Addition. Die Gl. (91) und (92) entstehen unter Anwendung von (93) aus der Form (77) für  ${}^k \mathfrak{M}$  und  ${}^k \mathfrak{N}$  beim Zusammenfügen mit der entsprechenden hinten differenzierten Größe. Die Gl. (93) selbst geht aus einer Kombination von Gl. (2) oder (2') und der entsprechenden für die hintere Differentiation hervor.

#### § 11. Kombinationen undeutbarer Größen

Das gesamte Formelsystem § 1 Gl. (1)–(52) für die vordere Differentiation geht, wie schon erwähnt, durch geeignete Verbindung mit einer entsprechenden Formel für die hintere Differentiation in ein System von Gleichungen über, das Kombinationen undeutbarer Größen in deutbare überführt. In der folgenden Zusammenstellung sind die wichtigsten Kombinationen undeutbarer Größen, nämlich diejenigen, welche in III zur Anwendung kommen werden, unter denselben Nummern wie ihre Ursprungsgleichung in § 1 angeschrieben.

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & i({}^k \Omega - \Omega^k) \dot{\Omega} - i({}^k \dot{\Omega} - \dot{\Omega}^k) \Omega \\ & = \dot{s}_0 \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \left( \hat{s}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right) = -s_0 \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k} + \left( \bar{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & i({}^k s_0 - s_0^k) \dot{\Omega} - i({}^k \dot{\Omega} - \dot{\Omega}^k) s_0 \\ & = -\left( \mathfrak{M}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right) + \dot{s}_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} = \left( \bar{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right) - \Omega \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k}, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & i({}^k \bar{s} - \bar{s}^k) \dot{\Omega} - i({}^k \dot{\Omega} - \dot{\Omega}^k) \bar{s} \\ & = \left[ \bar{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] + s_0 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} - \Omega \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} = \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right] - \mathfrak{M} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \hat{s} \frac{\partial \Omega}{\partial x_k}, \end{aligned} \right.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & i({}^k s_0 - s_0^k) \Omega - i({}^k \Omega - \Omega^k) s_0 \\ & = \left( \mathfrak{M}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k} \right) - \dot{s}_0 \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial x_k} = -\left( \bar{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right) + \dot{\Omega} \frac{\partial \dot{s}_0}{\partial x_k}, \end{aligned} \right.$$

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{s} - \hat{s}^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{s} \\ \left[ \hat{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] - s_0 \frac{\partial \hat{\mathfrak{M}}}{\partial x_k} + \hat{\Omega} \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} = \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] + \hat{\mathfrak{M}} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \hat{s} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k}, \end{array} \right.$$

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{s}_0 - \hat{s}_0^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{s}_0 \\ = - \left( \mathfrak{M}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right) + s_0 \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} = \left( \hat{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right) - \hat{\Omega} \frac{\partial s_0}{\partial x_k}, \end{array} \right.$$

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{s} - \hat{s}^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{s} \\ = - \hat{\Omega} \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} + \left[ \hat{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] + s_0 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} = \hat{s} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} + \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] - \mathfrak{M} \frac{\partial \hat{s}_0}{\partial x_k}, \end{array} \right.$$

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{s}_0 - \hat{s}_0^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{s}_0 \\ = \left( \mathfrak{M}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right) - s_0 \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} = - \left( \hat{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right) + \hat{\Omega} \frac{\partial s_0}{\partial x_k}, \end{array} \right.$$

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{s} - \hat{s}^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{s} \\ = \hat{\Omega} \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} + \left[ \hat{s}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] - s_0 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} = - \hat{s} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} + \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] + \mathfrak{M} \frac{\partial \hat{s}_0}{\partial x_k}, \end{array} \right.$$

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{\mathfrak{M}} - \hat{\mathfrak{M}}^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{\mathfrak{M}} \\ \left[ \hat{\mathfrak{M}}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] + s_0 \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} - \hat{s}_0 \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} = \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \hat{\mathfrak{M}}}{\partial x_k} \right] - \hat{s} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \hat{s} \frac{\partial \hat{s}_0}{\partial x_k}, \end{array} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{\mathfrak{M}} - \hat{\mathfrak{M}}^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{\mathfrak{M}} \\ \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \hat{\mathfrak{M}}}{\partial x_k} \right] - s_0 \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} + \hat{s}_0 \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_k} = \left[ \hat{\mathfrak{M}}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] + \hat{s} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \hat{s} \frac{\partial \hat{s}_0}{\partial x_k}, \end{array} \right.$$

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{\mathfrak{M}} - \hat{\mathfrak{M}}^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{\mathfrak{M}} \\ = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] - \left[ \hat{\mathfrak{M}}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] - \left[ \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] + \left[ \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] \right\}, \end{array} \right.$$

$$(44) \left\{ \begin{array}{l} i(k\hat{\mathfrak{M}} - \hat{\mathfrak{M}}^k) \hat{\Omega} - i(k\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^k) \hat{\mathfrak{M}} \\ = \frac{1}{2} \left\{ - \left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] + \left[ \hat{\mathfrak{M}}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_k} \right] - \left[ \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] + \left[ \hat{s}, \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_k} \right] \right\}.$$

In diesen Formeln wird von der abkürzenden Vektorschreibweise  $\left( \mathfrak{M}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_k} \right)$  [Definition Gl. (82)] und  $\left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_k} \right]$ , deren erste Komponente z. B.  $\left[ \mathfrak{M}, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_k} \right]_1 = A_2 \frac{\partial B_3}{\partial x_k} - A_3 \frac{\partial B_2}{\partial x_k}$  bedeutet, Gebrauch gemacht.

Die Gleichungen entspringen allein der Algebra der Diracschen Matrizen, obwohl sie Differentialquotienten enthalten. Sie erfordern weder eine spezielle Darstellung noch die Hermiteizität dieser Matrizen.

Frankfurt a. M., Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 4. September 1940)

**Über die Temperaturabhängigkeit  
der Hauptelastizitätskonstanten  
des Einkristalls von Kupfer, Gold, Blei, Aluminium  
bei tiefen Temperaturen**

Von E. Goens

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt)

(Mit 5 Abbildungen)

Während über die Temperaturabhängigkeit der Elastizitätskonstanten im Gebiet tiefer Temperaturen für Metalle in polykristalliner Form in der Literatur einige, wenn auch nicht sehr zahlreiche, Messungen vorliegen, fehlen sie bisher fast ganz für Einkristalle und damit auch die Kenntnis der Temperaturabhängigkeit der Hauptelastizitätskonstanten  $S_{ik}$  bzw.  $C_{ik}$ \*, die als echte Materialkonstanten, abgesehen von ihrem praktischen Interesse für viele Fragen der Festkörpertheorie von Bedeutung sind. Die nachfolgend mitgeteilten Ergebnisse sollen einen Beitrag in dieser Richtung liefern. Die zur Verfügung stehenden Mittel gestatteten dabei die Ausdehnung der Messungen bis zur Temperatur des flüssigen Wasserstoffs.

Die zur Untersuchung gelangenden kreiszylindrischen Einkristallstäbe von Cu, Au, Pb, Al waren eine Auswahl aus den Proben, die schon früher vom Verf. z. T. mit J. Weerts zur Bestimmung der Absolutwerte der Hauptelastizitätskoeffizienten  $S_{ik}$  bei Zimmertemperatur benutzt worden waren<sup>3), 4)</sup>. Die Cu-, Au- und Pb-Kristalle waren aus der Schmelze, die von Aluminium durch Rekristallisation nach kritischer Reckung hergestellt. Ihre Abmessungen betrugen bei Cu, Au, Pb etwa  $4 \times 100$  mm, bei Al 6—8 mm Länge und 3 bzw. 5 mm Durchmesser für die mit  $W$  bzw.  $S$  bezeichneten Kristallsorten.

Die Meßmethode ist bereits vor einer Reihe von Jahren beschrieben worden<sup>1)</sup>. Ihr Prinzip beruht auf der Bestimmung der Frequenz bzw. deren Temperaturabhängigkeit der Biegsungs- und Drillungseigenschwingungen eines Gebildes, das aus dem Probestab und zwei aufgelöteten symmetrischen Endmassen besteht (Abb. 1).

\* Die einzigen derartigen Messungen sind die an Na-Einkristall zwischen 80—210° K von S. L. Quimby u. S. Siegel, Phys. Rev. 54. S. 293. 1938.

Diese im Hörbereich liegenden Eigenfrequenzen wurden auf elektrodynamischem Wege wahrnehmbar gemacht und durch Überlagerung mit einem Normaltonsender gemessen. Bezüglich der Einzelheiten der Versuchsanordnung muß auf die erwähnte Veröffentlichung verwiesen werden, ebenso hinsichtlich der benutzten Formeln, von denen im folgenden nur das Wesentlichste zusammengestellt ist.

Bezeichnet für einen Kristallstab beliebiger Orientierung  $n_t$  und  $n_0$  die Schwingungszahl der Biegungs- oder Drillungseigenschwingung für die Temperatur  $t$  bzw. die Ausgangstemperatur  $t_0$ , so gilt für das Verhältnis der kristallelastischen Größen  $s_{33}$  (reziproker Elastizitätsmodul) bzw.  $s_g = \frac{1}{2}(s_{44} + s_{55})$  (reziproker Drillungsmodul für Kreiszylinder)

$$\frac{(s_{33})_t}{(s_{33})_0} = \frac{n_0^2}{n_t^2} (1 + \alpha(t - t_0)),$$

$$\frac{(s_g)_t}{(s_g)_0} = \frac{n_0^2}{n_t^2} (1 + (3\alpha - 2\gamma)(t - t_0))f.$$

Hierin bedeuten  $\alpha$ ,  $\gamma$  die mittleren thermischen Ausdehnungskoeffizienten der Probe bzw. des Eisens (Material der Endmassen) für das betreffende Temperaturintervall, die einer Arbeit von Ebert<sup>6)</sup> bzw. von Keesom, van Agt und Janson (Cu)<sup>7)</sup> entnommen wurden. Die Klammergrößen berücksichtigen den Einfluß der Dimensionsänderung der Probe infolge der thermischen Ausdehnung, der Faktor  $f$  umfaßt drei weitere Korrekturen. Zwei davon [vgl. <sup>1)</sup> Formel (29)] liegen hier unterhalb der Fehlergrenze, auf die dritte wird weiter unten noch eingegangen werden. Aus den Quotienten folgen dann  $\frac{\Delta s_{33}}{(s_{33})_0}$ ,  $\frac{\Delta s_g}{(s_g)_0}$  und durch Multiplikation mit den früher bestimmten auf die Ausgangstemperatur umgerechneten Absolutwerten<sup>3), 4)</sup> die Größen  $\Delta s_{33}$  und  $\Delta s_g$ , d. h. die Änderung der Absolutwerte in dem betreffenden Temperaturintervall.

Nun bestehen im kubischen System, dem die hier untersuchten Metalle angehören, für die Orientierungsabhängigkeit von  $s_{33}$  und  $s_g$  die Beziehungen

$$(1) \begin{cases} s_{33} = S_{11} - 2A\Gamma, & s_g = S_{44} + 4A\Gamma, \text{ wo } A = S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44}, \\ \Gamma = \cos^2\gamma_1 \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_2 \cos^2\gamma_3 + \cos^2\gamma_3 \cos^2\gamma_1, \end{cases}$$

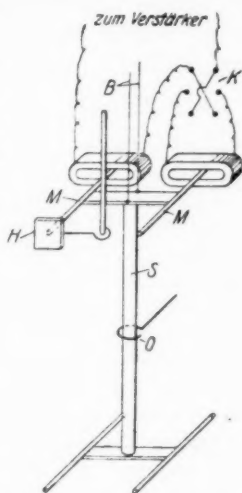


Abb. 1. (Aus Ann. d. Phys. [5] 4. S. 733. 1930)

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  die Winkel der Stabachse mit den kubischen Hauptachsen und  $S_{11}, S_{12}$  und  $S_{44}$  die Hauptelastizitätskoeffizienten bedeuten.  $\Gamma$  liegt zwischen 0 und  $1/3$ . Diesen Grenzen sind die Extremwerte von  $s_{33}$  und  $s_g$  zugeordnet entsprechend den kristallographischen Richtungen  $[100]$  und  $[111]$ . Da sich für kubische Kristalle wegen der Isotropie der thermischen Ausdehnung  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  und daher auch  $\Gamma$  mit der Temperatur nicht ändern, folgt für  $\Delta s_{33}$   $\Delta s_g$  aus (1)

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta s_{33} = \Delta S_{11} - 2 \Delta A \Gamma, & \Delta s_g = \Delta S_{44} + 4 \Delta A \Gamma, \\ \Delta A = \Delta S_{11} - \Delta S_{12} - \frac{1}{2} \Delta S_{44}, \end{cases}$$

mit deren Hilfe sich dann die Temperaturänderungen der Hauptelastizitätskoeffizienten  $\Delta S_{11}, \Delta S_{12}, \Delta S_{44}$  ableiten lassen, deren Bestimmung das Ziel der Untersuchung ist. Ferner besteht noch für die Änderung der Kompressibilität die Beziehung

$$(3) \quad \Delta \kappa = 3 (3 \Delta (s_{33})_{[111]} - \Delta S_{44}).$$

Die Eigenschwingungen der Cu-, Au- und Pb-Kristalle wurden bei  $+50^\circ, 0^\circ, -195^\circ, -253^\circ$ , die der Al-Kristalle nur bei  $+18^\circ, -195^\circ, -253^\circ$  bestimmt. Die Apparatur befand sich dabei jeweilig in einem Wasserbad konstanter Temperatur, in Eis, flüssigem  $N_2$  und flüssigem  $H_2$ . Als Endmassen dienten in der Bezeichnungsweise von <sup>1)</sup> bei Cu:  $F$  und  $H$  (vgl. weiter unten), bei Au, Pb:  $F$ , bei Al(S):  $A$ , bei Al(W):  $A, B$  oder  $C$ . Die Ordnungszahlen  $q$  der benutzten Eigentöne waren die folgenden: Torsionsschwingung stets  $q = 1$  (Grundton), Biegungsschwingungen: bei Cu, Al:  $q = 1$ , bei Au:  $q = 1$  und  $2$ , bei Pb:  $q = 2$  mit Ausnahme von Pb 9 ( $q = 1$ ).

Die Meßergebnisse sind in Abb. 2—5 wiedergegeben, die Probenbezeichnungen entsprechen denen der früheren Veröffentlichungen. Analog zu der bei den Absolutwerten gebräuchlichen Darstellung ist  $\Delta s_{33}$  und  $\Delta s_g$  als Funktion von  $3\Gamma$  aufgetragen, und zwar  $\Delta s_g$  in halbem Maßstab in gegenläufiger Richtung, so daß nach Formel (2) die Geraden durch die Meßpunkte parallel laufen müssen. Die Achsenabschnitte für  $3\Gamma = 0$  liefern  $\Delta S_{11}$  bzw.  $\Delta S_{44}$ , während sich  $\Delta S_{12}$  aus der Neigung der Geraden ergibt.

Obwohl der Fehler in  $\frac{s_{33}}{(s_{33})_0}$  bzw.  $\frac{s_g}{(s_g)_0}$ , soweit er durch die Frequenzmessung bedingt ist, durchschnittlich weniger als  $1\%$  beträgt, ließ sich diese Meßgenauigkeit nur teilweise ausnutzen. Eine gewisse Unsicherheit rührt zunächst von dem bereits in früheren Arbeiten diskutierten Umstande her, daß Kristallstäbe, abgesehen von einigen Sonderfällen (Stabachse  $\parallel [100], [110]$  und  $[111]$ ), die

bei dem vorhandenen Versuchsmaterial nur selten in genügender Annäherung vertreten waren, keine reinen Biegungs- und Drillungsschwingungen ausführen, sondern die eine Verformungsart von der anderen begleitet wird (Biegungs-Drillungskopplung). Die vom Verf. näher behandelte Theorie der Eigenschwingungen eines mit Endmassen versehenen Kristallzylinders beliebiger kristallographischer Orientierung<sup>2)</sup> liefert in der Formel für  $s_g$  gegenüber dem isotropen Stabe einen zusätzlichen Faktor  $\eta = \frac{1 - \chi D}{1 - \chi}$ . Hierin bedeutet für das

kubische System  $\chi = \frac{2A^2 \Psi(\gamma_i)}{s_{33} s_g}$ ,  $A$  dieselbe Größe wie in Formel (1) und  $\Psi(\gamma_i)$  eine Orientierungsfunktion [vgl. 2);  $\chi \leq 1$ , bei den vorliegenden Proben höchstens  $\sim 0,15$ ].  $D$  ist eine nur umständlich für jede Probe zu berechnende Größe, deren Temperaturabhängigkeit in geschlossener Form nicht angebar und überdies aus a. a. O. erörterten Gründen mit einer grundsätzlichen Unsicherheit behaftet ist. Da  $\chi D \ll 1$  zu sein pflegt, kann man bei der Ableitung der Korrektur an  $\frac{s_g}{(s_g)_0}$ , die von der Temperaturabhängigkeit von  $\eta$  herührt, den Temperaturgang von  $D$  vernachlässigen, während für den der in  $\chi$  vorkommenden Größen Näherungswerte genügen. Da die so erhaltenen Korrekturen in den  $\Delta s_g$  im ungünstigsten Fall überhaupt nur etwa 3% betragen, erscheint das Verfahren hinreichend gerechtfertigt.

Die Berechnung einer analogen Korrektur für die Temperaturabhängigkeit von  $s_{33}$  erwies sich wegen der Kompliziertheit der Formeln als praktisch undurchführbar. Indessen ließen experimentelle Befunde erkennen, daß die Abweichung vom Verhalten eines isotropen Stabes offenbar keine wesentlichen Beträge erreicht. So ergab ein Aluminiumkristall für  $\frac{s_{33}}{(s_{33})_0}$  mit und ohne Endmassen praktisch denselben Wert [vgl. dazu 1), S. 770]. Weiter spricht dafür, daß bei den Au-Kristallen der 1. und 2. Eigenton bis auf wenige  $10^{-4}$  übereinstimmende Zahlen für  $\frac{s_{33}}{(s_{33})_0}$  lieferte, obwohl der Einfluß der Biegungs-Drillungskopplung in beiden Fällen sehr verschieden sein müßte. Die einzige stärkere Abweichung (Au 9 bei  $-253^\circ$ , Differenz 2%) ist wahrscheinlich auf eine meßtechnische Störung zurückzuführen.

Ein anderer die Genauigkeit beeinträchtigender Umstand machte sich dadurch bemerkbar, daß sich bei Au und Cu nach Auswertung der Messungen für  $\Delta \alpha$  aus Formel (3) im Intervall  $50 \rightarrow 0^\circ$  ein positiver, also unrichtiger, Wert ergab. Zwar genügen in  $\Delta \alpha$  als 3facher Differenz zweier vergleichsweise großer Zahlen schon geringe



Fehler in den Einzelwerten, um eine derartige Unstimmigkeit hervorzu-  
zurufen, doch war an der Realität nicht zu zweifeln. Ihre Ursache  
ist auf folgenden Umstand zurückzuführen.

Da die Methode auch zur Bestimmung des Absolutwerts von  $s_g$   
diente [vgl. <sup>3)</sup>, <sup>4)</sup>], mußte die Gestalt des schwingenden Gebildes  
möglichst genau den theoretischen Voraussetzungen entsprechen.  
Demgemäß waren die Proben auf die Endmassen ohne Verbindungs-  
teil stumpf aufgelötet, und zwar mit Woodschem Metall, da die  
Endmassen zur Erzielung eines möglichst symmetrischen Baues aus  
drei Teilen weich zusammengelötet waren. Diese Verbindungsart  
zwischen Stab- und Endmassen war für die Übertragung eines  
Drillungsmoments keine ideal starre, besonders dann nicht, wenn  
sich die Meßtemperatur dem Schmelzpunkt des Lotes näherte, d. h.  
für die Messung bei  $+50^\circ$ ). Systematische Versuche über den  
Einfluß der Befestigungsart, auf die hier nicht näher eingegangen  
werden soll, zeigten, daß unter sonst gleichen Verhältnissen mit ab-  
nehmender Güte der Verbindung zwischen Proben und Endmassen  
eine scheinbare Vergrößerung des Temperaturgangs der Torsions-  
eigenschwingungen festzustellen war, während der Einfluß auf die  
Biegungsschwingungen völlig innerhalb der Meßfehler lag. Auf  
Grund dieser Erfahrungen wurde ein weiteres Paar Endmassen ( $H$ )  
hergestellt, die je aus einem Stück Stahl herausgearbeitet waren  
und in ihrem Mittelteil eine Verstärkung besaßen mit einer 2 mm  
tiefen Bohrung vom Durchmesser der Probestäbe, in die diese nun-  
mehr mit Zinnlot eingelötet werden konnten. Nach den Vorversuchen  
wurde hierdurch eine genügende Befestigung gewährleistet. Mit  
diesen für Absolutmessungen allerdings kaum geeigneten Endmassen  
wurden die Messungen an den Cu-Einkristallen teilweise wiederholt.  
Das Ergebnis ist aus Abb. 2 zu ersehen, in der sowohl die Werte  
der ursprünglichen Meßreihe (1) als auch die der Wiederholung  
(Meßreihe 2) eingetragen sind. Während die Abweichungen in den  
 $\Delta s_{33}$  gering bleiben und damit eine weitere Stütze für die Einfluß-  
losigkeit der Biegungs-Drillungskopplung auf die Biegungsschwin-  
gungen liefern, beträgt die Differenz in  $\Delta s_g$  für das Intervall  
 $50 \rightarrow 0^\circ$  durchschnittlich  $10\text{--}15\%$ , für  $0 \rightarrow -195^\circ$  nur noch

\*) Für die Absolutwerte war dieser Umstand von geringerer Bedeutung,  
da hier die Genauigkeit noch durch andere Faktoren (Fehler in den Ab-  
messungen der Proben usw.) begrenzt war. — Im übrigen wächst der Effekt  
auch mit der „Drillungssteifigkeit“ der Proben. Bei Fe-Kristallen war die  
Fälschung von  $\Delta x$  bei  $50 \rightarrow 0^\circ$  so merklich, daß die Ergebnisse hier nicht  
aufgenommen wurden, umgekehrt mag sich daraus erklären, daß der Gang  
von  $\Delta x$  bei Pb wenigstens dem Sinne nach richtig herauskommt.



etwa 4%, wobei in Übereinstimmung mit den Vorversuchen die erste Meßreihe dem absoluten Betrage nach größere  $\Delta s_g$  ergibt. Allerdings wird die Abweichung möglicherweise noch dadurch etwas vergrößert, daß bei der zweiten Meßreihe keine Korrektur für die Biegungs-Drillungskopplung angebracht werden konnte, da die für die Berechnung erforderlichen Daten der Endmassen  $H$  nicht bekannt waren. An der Diskrepanz für das Intervall  $50 \rightarrow 0^\circ$  würde sich dadurch nicht viel

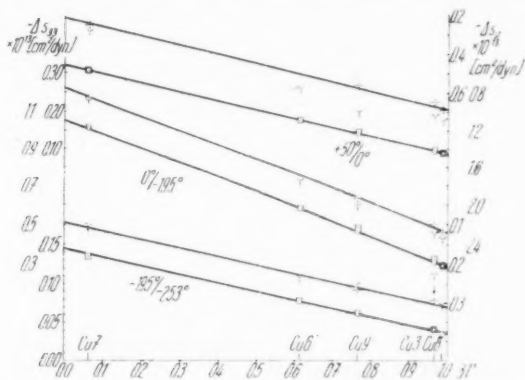


Abb. 2. Cu. —  $\Delta s_{33}$  und —  $\Delta s_g$  als Funktionen von  $3F$ .

1. Meßreihe  $\Delta s_{33}$   $\square$   $\Delta s_g$   $\gamma$   
 2. Meßreihe  $\Delta s_{33}$   $\odot$   $\Delta s_g$   $+$

ändern, dagegen könnte sich für  $0 \rightarrow 195^\circ$  die Differenz vielleicht um die Hälfte verkleinern. Bei  $-253^\circ$  wurden nur an zwei Stäben (Cu 3 und 9) Messungen ausgeführt. Bei Cu 9 stimmte  $[\Delta s_g]_{-195^\circ}^{-253^\circ}$  für beide Meßreihen innerhalb der Fehlergrenzen überein, bei Cu 3 hatte in der zweiten Meßreihe der Meßpunkt seine richtige Lage (vgl. Abb. 2), während er bei der ersten Meßreihe stark herausfiel. Worauf letzteres zurückzuführen ist, bleibt zweifelhaft, ein Beobachtungsfehler scheidet jedenfalls aus, da das Ergebnis reproduzierbar war. Immerhin dürfte aus den Ergebnissen mit genügender Sicherheit hervorgehen, daß in diesem Temperaturbereich der Einfluß der Lötung keine merkliche Rolle spielt.

An den Au-Kristallen waren Wiederholungsmessungen nicht möglich, da die Kristalle nur entliehen und inzwischen wieder zurückgegeben worden waren. Doch war nach den Versuchen an den Cu-Einkristallen nur für  $\Delta s_g$  im Gebiet  $50 \rightarrow 0^\circ$  ein wesentlicher Fehler zu erwarten. Um diesen einigermaßen auszugleichen, wurde durch graphische Extrapolation der Messungen

bei  $-253/-195/0^\circ \Delta x$  für  $50 \rightarrow 0^\circ$  abgeschätzt ( $\sim -0,06 \cdot 10^{-13}$ ) und mit diesem Wert vermittels Gl. (3)  $\Delta S_{44}$  berechnet. Es ergab sich so  $\Delta S_{44} = -0,35 \cdot 10^{-13}$  gegenüber dem aus den Messungen abgeleiteten Wert von  $-0,38 \cdot 10^{-13}$ . In Abb. 3 entspricht ersterer Zahl die punktierte Gerade. Der geschätzte Wert erscheint auch deshalb plausibel, weil er ebenso wie in den anderen Temperatur-

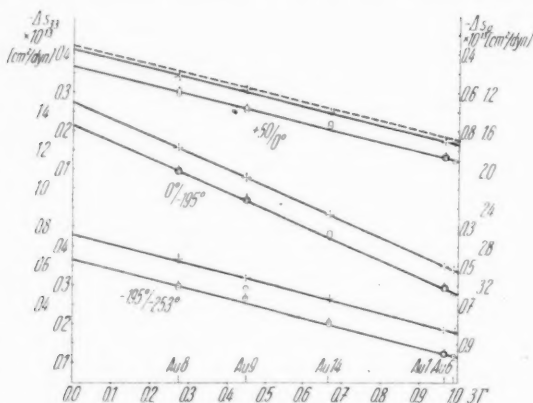


Abb. 3. Au.  $-\Delta S_{33}$  und  $-\Delta S_{44}$  als Funktionen von  $3T$ .

$$\Delta S_{33} \begin{matrix} q=1 \\ q=2 \end{matrix} \begin{matrix} \odot \\ \ominus \end{matrix} \Delta S_{44} +$$

intervallen um einige Prozent kleiner ist als  $\Delta S_{11}$ . Tab. 1 enthält beide Zahlen, indessen ist für die weiteren Rechnungen die kleinere benutzt worden.

Bei den zeitlich am meisten zurückliegenden Untersuchungen am Al-Einkristall waren Messungen bei  $+50^\circ$  noch nicht ausgeführt worden, so daß hier die Kontrolle durch den Gang von  $\Delta x$  entfällt. Die befriedigende Übereinstimmung der Ergebnisse für die beiden verschiedenen dimensionierten Kristallsorten  $S$  und  $W$  (vgl. Abb. 5) läßt aber keine größeren Fehler erwarten.

Die Ableitung der  $\Delta S_{ik}$  für Pb bot insofern Schwierigkeiten, als die Meßpunkte von Pb 9, die für die eindeutige Festlegung der Ausgleichsgeraden in Abb. 4 von besonderem Wert gewesen wären, mit den Ergebnissen der anderen Proben zum Teil wenig befriedigend übereinstimmen, so daß im besonderen bei den Intervallen  $+50/0^\circ$  und  $-195/-253^\circ$  für die Lage der Ausgleichsgeraden ein gewisser Spielraum bleibt. Der Grund hierfür muß in einer fehlerhaften Beschaffenheit der Probe gesucht werden [vgl. dazu auch <sup>4)</sup>], äußere

Tabelle 1

Kri- stall	Temperatur- intervall	in $10^{-12}$ [cm <sup>2</sup> /dyn]				$\Delta \alpha$	$-\frac{\Delta s_{ij}}{(s_{ij})_0}$		
		$\Delta S_{11}$	$\Delta S_{12}$	$\Delta S_{14}$	$\Delta \left( S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2} S_{44} \right)$		[100]	[111]	[111]
Cu	+50 → 0°	—	+ 0,1 <sub>4</sub>	—	—	— 0,1 <sub>4</sub>	0,016 <sub>7</sub>	0,016 <sub>7</sub>	0,021 <sub>3</sub>
	0 → -195°	—	+ 0,4 <sub>7</sub>	— 0,22 <sub>0</sub>	— 1,15	— 0,3 <sub>4</sub>	0,057 <sub>7</sub>	0,055 <sub>5</sub>	0,070 <sub>6</sub>
	-195 → -253°	—	+ 0,06 <sub>4</sub>	— 0,09 <sub>3</sub>	— 0,16 <sub>2</sub>	— 0,0 <sub>5</sub>	0,007 <sub>1</sub>	0,006 <sub>9</sub>	0,009 <sub>9</sub>
Au	+50 → 0°	—	+ 0,1 <sub>7</sub>	0,35	—	— 0,0 <sub>5</sub>	0,015 <sub>5</sub>	0,014 <sub>5</sub>	0,016
	0 → -195°	—	(+ 0,1 <sub>0</sub> )	(0,38)	—	(+ 0,03 <sub>3</sub> )	0,057 <sub>4</sub>	0,053 <sub>3</sub>	0,058
	-195 → -253°	—	+ 0,64	— 1,30	— 1,31	— 0,1 <sub>8</sub>	0,015 <sub>8</sub>	0,013 <sub>3</sub>	0,016
Pb	+50 → 0°	—	+ 2,9	— 3,9	—	— 1 <sub>33</sub>	0,070	0,06 <sub>6</sub>	0,07
	0 → -195°	—	+ 8,4	— 11,5	—	— 3 <sub>33</sub>	0,198	0,168	0,196
	-195 → -253°	—	+ 1,6	— 2,9 <sub>4</sub>	—	— 2 <sub>7</sub>	0,046	0,05 <sub>1</sub>	0,04 <sub>4</sub>
Al	+18 → -195°	—	+ 0,75	— 3,3	—	— 0,24	0,100	0,088	0,105
	-195 → -253°	—	+ 0,05 <sub>5</sub>	— 0,27	—	— 0,0 <sub>5</sub>	0,006 <sub>9</sub>	0,006 <sub>5</sub>	0,007 <sub>6</sub>

Umstände machten indes die Herstellung und Untersuchung weiterer ähnlich orientierter Proben unmöglich.

In Tab. 1 sind die für  $\Delta S_{11}$ ,  $\Delta S_{12}$  und  $\Delta S_{44}$  abgeleiteten Zahlenwerte zusammengestellt, ferner  $\Delta(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44})$  als Maß

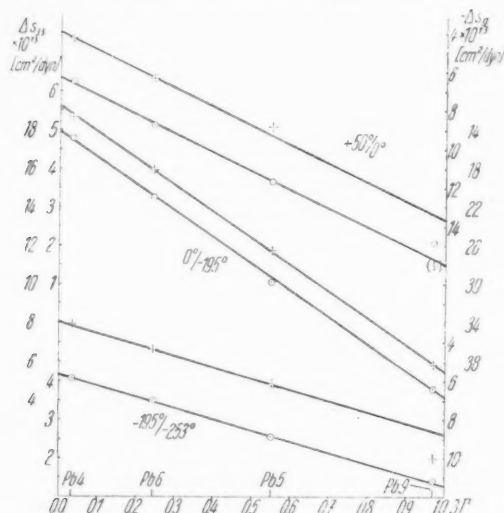


Abb. 4. Pb.  $-\Delta s_{33}$  und  $-\Delta s_9$  als Funktionen von  $3\Gamma$ .  
 $\Delta s_{33} \bigcirc$   $-\Delta s_9 +$

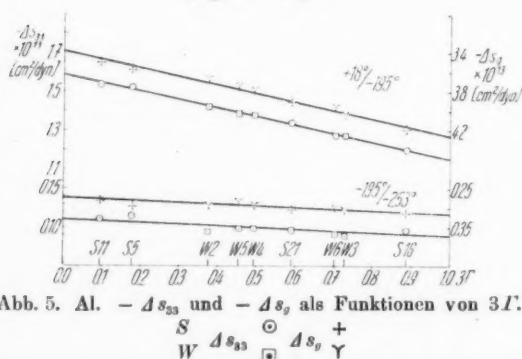


Abb. 5. Al.  $-\Delta s_{33}$  und  $-\Delta s_9$  als Funktionen von  $3\Gamma$ .  
 $\Delta s_{33} \bigcirc$   $-\Delta s_9 +$

für die Anisotropieänderung sowie  $\Delta\alpha$ . Endlich enthalten die letzten vier Spalten die rückwärts berechneten relativen Änderungen von  $s_{33}$  und  $s_9$  für die Richtungen der elastischen Extremwerte [100] und [111] ( $3\Gamma = 0$  bzw. 1). Es sei hier übrigens ausdrücklich

betont, daß trotz der in den letzten Abschnitten diskutierten Einschränkungen die erzielte Genauigkeit für die derzeitigen theoretischen und praktischen Bedürfnisse völlig ausreichend ist. Zu beachten ist ferner, daß sich die Angaben der Tabellen entsprechend der Meßmethode auf die adiabatischen Konstanten beziehen.

Die angegebenen  $\Delta \kappa$  lassen sich teilweise mit unmittelbaren Bestimmungen an polykristallinem Material von Grüneisen<sup>8)</sup> zwischen  $+160^\circ$  und  $-190^\circ$  sowie von Bridgman<sup>9)</sup> zwischen  $75^\circ$  und  $30^\circ$  vergleichen, von denen die letzteren wegen des geringen Temperaturintervall weniger genau sind. Da sich die genannten Arbeiten auf die isothermen Kompressibilitäten beziehen, sind die vorliegenden Zahlen noch entsprechend umzurechnen nach der Formel

$$[\Delta \kappa_{ad} - \Delta \kappa_{is}]_{T_2}^{T_1} = \frac{9A}{4 \cdot 19 \cdot 10^7 \varrho} \left[ \frac{T_1 \alpha_{T_1}^2}{(C_p)_{T_1}} - \frac{T_2 \alpha_{T_2}^2}{(C_p)_{T_2}} \right].$$

$A$  Atomgewicht,  $\varrho$  Dichte,  $\alpha_{T_1}$ ,  $\alpha_{T_2}$  thermischer Ausdehnungskoeffizient bei den absoluten Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ ,  $C_p$  Atomwärme bei konstantem Druck. Für die eingehenden differentiellen Ausdehnungskoeffizienten liegen für Cu unmittelbare Beobachtungen von Adenstedt<sup>10)</sup> vor, für die übrigen Metalle wurden die von Ebert<sup>6)</sup> nach der Grüneisenschen Formel berechneten benutzt.

Tabelle 2

Temperaturkoeffizienten der isothermen Kompressibilität  $\frac{1}{\kappa_0} \frac{\Delta \kappa}{\Delta t}$  (in  $10^{-6}$ )

	Goens		Grüneisen		Bridgman	
Cu	$+50/0^\circ$ $0/-195^\circ$	$4_{17}$ $3_{16}$	$+133/+17^\circ$ $+18/-195^\circ$	$4,7$ $3,4$	$+75/+30^\circ$ —	$4_{18}$ —
Al	— $+18/-195^\circ$	— $2_{16}$	$+125/+15^\circ$ $+15/-191^\circ$	(15) $4,6$	$+75/+30^\circ$ —	$4_{10}$ —
Pb	$+50/0^\circ$ $0/-195^\circ$	(15) $9$	— $+14/-195^\circ$	— (11)	$+75/+30^\circ$ —	$7$ —

Tab. 2 gibt eine Zusammenstellung der Ergebnisse für  $\frac{1}{\kappa_0} \frac{\Delta \kappa}{\Delta t}$ . Bei Cu ist die Übereinstimmung recht befriedigend, bei Al dagegen weniger. Vermutlich wird der Zahlenwert des Verf. aus den oben erörterten Gründen etwas zu klein sein, während umgekehrt die Messungen von Grüneisen nach dessen Angaben bei weichem Material leicht zu große Temperaturkoeffizienten ergeben. Bei Pb ist die Übereinstimmung zwischen den Messungen von Grüneisen und dem Verf. besser, als zu erwarten war.

Die letzten Spalten der Tab. 1 lassen erkennen, daß die Anisotropie der relativen Änderungen von  $s_{33}$  und  $s_{\theta}$  bei Cu, Au und Pb wesentlich geringer ist als die der Absolutwerte <sup>[3], 4)</sup>, beispielsweise erhält man für Cu

$$(s_{33})_{[100]} : (s_{33})_{[111]} = 2,85, \quad \left[ \frac{\Delta s_{33}}{(s_{33})_0} \right]_{[100]} : \left[ \frac{\Delta s_{33}}{(s_{33})_0} \right]_{[111]} = 1,29,$$

für Au und Pb liegen die Verhältnisse noch extremer, demgegenüber sind bei Aluminium die entsprechenden Zahlen 1,21 bzw. 1,14.

Tabelle 3

Hauptelastizitätskonstanten bei  $+20^\circ$  und  $-273^\circ$   
( $S_{ik}$  in  $10^{-10}$  [cm<sup>2</sup>/dyn],  $C_{ik}$  in  $10^{11}$  [dyn/cm<sup>2</sup>])

Kristall	Temp.	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{44}$	$S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$
Cu	$+20^\circ$	14,9 <sub>1</sub>	- 6,2 <sub>5</sub>	13,2 <sub>8</sub>	14,5 <sub>2</sub>	17,0	12,3	7,5 <sub>3</sub>
	$-273^\circ$	13,5 <sub>8</sub>	- 5,6 <sub>5</sub>	12,3 <sub>5</sub>	13,0 <sub>5</sub>	18,2	13,0	8,1
Au	$+20^\circ$	20,3 <sub>0</sub>	-10,6 <sub>5</sub>	23,8 <sub>0</sub>	22,0 <sub>5</sub>	18,6	15,7	4,20
	$-273^\circ$	21,3 <sub>9</sub>	- 9,7 <sub>8</sub>	21,9 <sub>5</sub>	20,1 <sub>5</sub>	19,4	16,2	4,55
Pb	$+20^\circ$	93,7 <sub>0</sub>	-42,7 <sub>6</sub>	69,4 <sub>4</sub>	101	4,8 <sub>3</sub>	4,0 <sub>5</sub>	1,44
	$-273^\circ$	67,7 <sub>5</sub>	-31,7 <sub>0</sub>	52,3 <sub>8</sub>	72,2	6,7	5,7	1,89
Al	$+20^\circ$	15,9 <sub>0</sub>	- 5,8 <sub>0</sub>	35,1 <sub>6</sub>	4,1 <sub>2</sub>	10,8	6,2 <sub>2</sub>	2,84
	$-273^\circ$	14,2 <sub>0</sub>	- 5,0 <sub>0</sub>	31,4 <sub>6</sub>	3,4 <sub>6</sub>	11,4	6,2 <sub>0</sub>	3,1

Da für die Theorie des Festkörpers besonders die Hauptelastizitätskonstanten beim absoluten Nullpunkt von Bedeutung sind, ist in Tab. 3 eine Zusammenstellung der  $S_{ik}$  und der daraus berechneten  $C_{ik}$  für  $+20^\circ$  bzw.  $-273^\circ$  gegeben, wobei die Werte für letztere Temperatur durch graphische Extrapolation gewonnen wurden. Von den hier untersuchten Metallen liegt bisher nur für Cu eine quantenmechanische Berechnung der  $C_{ik}$  von K. Fuchs<sup>11)</sup> vor. Seine unmittelbaren Ergebnisse sind die folgenden (in  $10^{11}$  dyn/cm<sup>2</sup>):

$$C_{11} - C_{12} = 5,1 (5,2), \quad C_{44} = 8,9 (8,2), \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12}) = 14,1 (14,7).$$

Die Übereinstimmung mit den in Klammern beigefügten Zahlen der vorliegenden Arbeit ist recht befriedigend, für  $C_{11}$  und  $C_{12}$  liefern die Fuchsschen Werte 17,5 bzw. 12,4.

Von Interesse ist endlich noch die Größe der Temperaturabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der elastischen Longitudinal- und Transversalwellen (1 long., 2 transv.).

Sie berechnen sich nach der Formel  $v_i = \sqrt{\frac{\zeta_i}{\rho}}$ , wo  $\zeta_i$  die 3. reellen

Wurzeln einer kubischen Gleichung bedeuten, deren Koeffizienten von den  $C_{ik}$  und den Winkeln der Fortpflanzungsrichtung mit den kristallographischen Hauptachsen abhängen. Die Berechnung der  $\zeta_i$  ist infolgedessen ziemlich umständlich, wenn sie sich auch, wie vom Verf. näher dargelegt wurde<sup>5)</sup>, in einzelnen ausgezeichneten Schnittebenen ( $\{100\}$  und  $\{110\}$  im kubischen System) getrennt in Abhängigkeit von der Fortpflanzungsrichtung angeben lassen. Für Pb, wo die Änderung der  $v_i$  am größten ist, wurde nach letzteren Formeln die Orientierungsabhängigkeit von  $v_i$  bei  $+20^\circ$  und  $-273^\circ$  mit den

$C_{ik}$  der Tab. 3 berechnet,  $\frac{v - 273^\circ}{v + 20^\circ}$  erwies sich dabei als weitgehend

konstant und für die beiden Transversalwellen nahezu gleich groß, was bei den anderen Metallen durch Stichproben bestätigt wurde. Die Zahlen der Tab. 4 geben daher einen genügenden Überblick über die Schallgeschwindigkeitsänderung zwischen Zimmertemperatur und dem absoluten Nullpunkt und damit zugleich der Debyeschen Temperaturen  $\Theta$ , die den Schallgeschwindigkeiten proportional sind.

Tabelle 4

Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der elastischen Wellen  $\frac{v - 273^\circ}{v + 20^\circ}$

	long.	transv.		long.	transv.
Cu	1,04	1,04	Pb	1,1 <sub>8</sub>	1,15
Au	1,02	1,04	Al	1,03	1,06

Man sieht daraus, daß abgesehen von Pb die Änderungen so gering sind, daß die Verwendung von temperaturunabhängigen  $\Theta$ -Werten in den Debyeschen Funktionen für Energieinhalt und spezifische Wärme, soweit das kristallelastische Verhalten in Frage kommt, gerechtfertigt erscheint.

#### Zusammenfassung

Aus Messungen der Temperaturabhängigkeit der Bieungs- und Drillungseigenschwingungen von Kristallstäben wird die Änderung der Hauptelastizitätskonstanten des Einkristalls von Cu, Au, Pb und Al im Gebiet von  $+50^\circ$  bis  $-253^\circ$  abgeleitet. Die für den absoluten Nullpunkt extrapolierten Werte der Hauptkonstanten werden angegeben, sie stimmen bei Cu recht befriedigend mit quantenmechanischen Berechnungen von K. Fuchs überein.

Eine auf Grund der Ergebnisse ausgeführte überschlägliche Berechnung zeigte, daß sich mit Ausnahme von Pb die Fort-

pflanzungsgeschwindigkeiten der elastischen Wellen in den untersuchten Kristallen nur um wenige Prozent zwischen Zimmertemperatur und dem absoluten Nullpunkt ändern.

---

#### Literaturverzeichnis

- 1) E. Goens, Ann. d. Phys. [5] **4**. S. 733. 1930.
- 2) E. Goens, Ann. d. Phys. [5] **15**. S. 455. 1932.
- 3) E. Goens, Ann. d. Phys. [5] **17**. S. 233. 1933 (Al).
- 4) E. Goens, z. T. mit J. Weerts, Phys. Ztschr. **37**. S. 321. 1936 (Cu, Au, Pb).
- 5) E. Goens, Ann. d. Phys. [5] **29**. S. 279. 1937.
- 6) H. Ebert, Ztschr. f. Phys. **47**. S. 712. 1928.
- 7) W. Keesom, F. van Agt u. A. Janson, Proc. Amst. **29**. S. 786. 1926.
- 8) W. Grüneisen, Ann. d. Phys. **33**. S. 1239. 1910.
- 9) P. W. Bridgman, The Physics of High Pressure, London 1931.
- 10) H. Adenstedt, Ann. d. Phys. [5] **26**. S. 69. 1936.
- 11) H. Fuchs, Proc. Roy. Soc. Lond. **157**. S. 444. 1936.

Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen 13. September 1940)

---



**Dickenbestimmungen an dünnen Metallschichten  
durch optische Untersuchungen  
und Röntgenstrahlinterferenzen<sup>1)</sup>**

**Von Franz Odenbach**

(Mit 3 Abbildungen)

§ 1. Einleitung

Zur Bestimmung der optischen Konstanten dünner Metallschichten mittels Beobachtung des Polarisationszustandes des an der Schicht reflektierten und von ihr durchgelassenen Lichtes hat Försterling<sup>2)</sup> kürzlich Formeln angegeben, die es gestatten, unter der Annahme, daß die Schicht homogen und isotrop ist, den Brechungsindex  $n$  und den Absorptionskoeffizienten  $k$  ohne jede Vernachlässigung zu berechnen. Bei den neuen Formeln wird die Oberfläche der Schicht nicht mit anderen Stoffen in Berührung gebracht. In dieser Arbeit sollen die Voraussetzungen, die bei der Ableitung der Formeln zugrunde lagen, geprüft werden und die Konstanten einiger Metalle in dünner Schicht ermittelt werden.

Um die Anwendbarkeit der neuen Methode zur Bestimmung von  $n$  und  $k$  zu prüfen, wurde die Dicke der Schicht nach zwei vollkommen verschiedenen Methoden bestimmt. Zunächst wurde die Dicke der Schicht unter Verwendung der nach den neuen Formeln berechneten Größen  $n$  und  $k$  nach der von Essers-Rheindorf<sup>3)</sup> benutzten Methode bestimmt. Ferner wurde die Dicke der Schicht nach den von H. Kiessig entdeckten Röntgenstrahlinterferenzen an dünnen Metallschichten bestimmt<sup>4)</sup>.

§ 2. Die Berechnung der optischen Konstanten und die optische Dickenbestimmung

Die untersuchten Schichten wurden durch Aufdampfen des betreffenden Metalls im Hochvakuum hergestellt. Die Beobachtung

1) D. 38.

2) K. Försterling, Ann. d. Phys. [5] 30. S. 745. 1937.

3) K. Försterling, Gött. Nachr. S. 449. 1911; N. Galli, Diss. Göttingen 1911; B. Pogany, Ann. d. Phys. [4] 49. S. 531. 1916; G. Essers-Rheindorf, Ann. d. Phys. [5] 28. S. 297. 1937.

4) H. Kiessig, Ann. d. Phys. [5] 10. S. 769. 1931.

wurde in Luft vorgenommen. Zur Berechnung von  $n$  und  $k$  benötigt man die Polarisationszustände des an den Grenzen Luftschicht und Glasschicht reflektierten Lichtes und des durchgegangenen Lichtes. Das sind die Polarisationszustände der mit  $R, R^*, D$  bezeichneten Strahlen der Abb. 1. Da die Beobachtungen in Luft vorgenommen wurden, mußte zunächst aus den gemessenen Azimuten  $[X_r], [X_r^*], [X_D]$ , die zu den Strahlen  $R, [R^*], [D]$  der Abb. 1 gehören, nach den Formeln F (6)<sup>1)</sup> die in die Rechnung eingehenden Größen  $\text{tg } X_r, \text{tg } X_r^*, \text{tg } X_D$  berechnet werden.

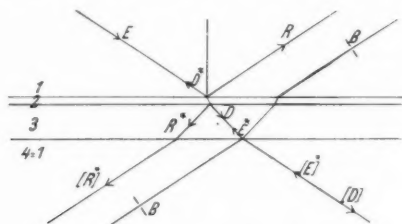


Abb. 1. Strahlengang bei der optischen Untersuchung

Der reziproke Wert des Quadrates der zu berechnenden Größe  $n_2 = n - ik$  ergibt sich aus F (14) zu

$$\frac{1}{n_2^2} = -\frac{n_3^2 - 1}{2n_3^2} y + \frac{1}{b}.$$

Auf der rechten Seite stehen außer  $y$  nur Konstanten.  $y$  ist aus den Beobachtungsdaten zu berechnen F (17), (18), (19). Aus dem so erhaltenen Wert für  $1/n_2^2$  wurde dann

$$n_2^2 = (n - ik)^2 = n^2 - k^2 - i 2nk$$

und hieraus  $n$  und  $k$  berechnet. Die so erhaltenen Werte für  $n$  und  $k$  wurden nun benutzt, um die Dicke der Schicht zu berechnen. Aus F (11) erhält man für  $D$

$$(1) \quad D = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - a_1^2}} \arctg \frac{i}{A} \frac{(n_3^2 - 1) c_1 \cdot \sqrt{n_2^2 - a_1^2}}{n_2^2 - 2a_1^2}.$$

Hierin ist das Vorzeichen der Wurzel so zu wählen, daß sie für  $a_1 = 0$  in  $n_2 = n - ik$  übergeht;  $A$  ist allein aus beobachteten Größen aufgebaut [F (9)]. Nach dieser Formel, in der keinerlei Vernachlässigungen vorkommen, wurden die Schichtdicken berechnet. Nur der Realteil der Gl. (1) hat einen physikalischen Sinn, der

1) F (6) soll heißen: Formel (6) der Arbeit von Försterling.

imaginäre Teil der rechten Seite müßte streng genommen verschwinden. Daß er dies nicht tut, liegt einerseits daran, daß die Beobachtungen nicht absolut genau sind, andererseits aber die Voraussetzung, daß die Schicht homogen und isotrop ist, nicht für jede Schicht erfüllt zu sein braucht. Der Quotient Imaginärteil zu Realteil muß also klein sein. Er liefert somit ein Kriterium für die Anwendbarkeit der neuen Methode zur Dickenbestimmung. Es sei ausdrücklich betont, daß im folgenden unter der optisch gemessenen Schichtdicke immer nur der Realteil obiger Gleichung verstanden wird.

Entwickelt man die Arcustangens-Funktion in eine Reihe und bricht nach dem ersten Gliede ab, so erhält man, indem man  $A$  nach  $F$  (9) durch die Azimute und Phasen ausdrückt

$$(2) \quad \left\{ D = \frac{\lambda}{2\pi} (n_s^2 - 1) c_1 \left\{ \frac{(n^2 - k^2 - 2a_1^2) 2q \sin A - (q^2 - 1) 2nk}{[(n^2 - k^2 - 2a_1^2)^2 + (2nk)^2] [q^2 + 1 - 2q \cos A]} \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{(n^2 - k^2 - 2a_1^2) (q^2 - 1) + 2nk \cdot 2q \sin A}{[(n^2 - k^2 - 2a_1^2)^2 + (2nk)^2] [q^2 + 1 - 2q \cos A]} \right\} \right.$$

Dabei ist gesetzt

$$q = \frac{\operatorname{tg} \chi_r}{\operatorname{tg} \chi_r^*} \quad \text{und} \quad A = \delta_r^* - \delta_r.$$

Es hat sich ergeben, daß diese Näherungsformel für Schichtdicken unterhalb  $20 m\mu$  brauchbar ist. (Genauere Angaben folgen weiter unten). Über Gl. (2) gilt sinngemäß das oben über Gl. (1) Gesagte.

### § 3. Dickenbestimmung mittels Röntgenstrahlinterferenzen

Durch die Zickzackreflexion in der Schicht treten bei der Reflexion von Röntgenlicht Interferenzen auf, aus deren Maxima und Minima man die Dicke berechnen kann. Es gilt<sup>1)</sup>

$$(3) \quad D = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_2^2 - m_1^2}{q_2^2 - q_1^2}}.$$

Hierbei sind  $q_1$  und  $q_2$  die Glanzwinkel, die zu den Interferenzstreifen der Ordnungszahl  $m_1$  und  $m_2$  gehören, und  $\lambda$  die Wellenlänge der benutzten Röntgenstrahlen. Die Ordnungszahlen sind dabei

$$\text{für Maxima } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

$$\text{für Minima } 0, 1, 2, 3, \dots$$

Setzt man den Brechungsindex der Röntgenstrahlen, der nur sehr wenig von 1 abweicht,  $n = 1 - \delta$ , so ergibt sich für  $\delta$  der Ausdruck

$$(4) \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{m_2^2 q_1^2 - m_1^2 q_2^2}{m_2^2 - m_1^2}.$$

1) H. Kiessig, a. a. O., S. 770; H. Gierok, Diss. Hamburg 1936.

Für Dickenbestimmung mittels Röntgenstrahlinterferenzen ist es erforderlich, möglichst viele, gut ausgeprägte Interferenzstreifen zu erhalten. Dies ist aber nur für dickere Schichten möglich. Ferner ist zu berücksichtigen, daß die Interferenzstreifen sich dem Intensitätsabfall an der Grenze der Totalreflexion überlagern, wodurch die Lage der Extrema verschoben wird. Man muß deshalb entweder eine unsichere Korrektur der Lage der Extrema vornehmen, oder aber, falls genügend Interferenzstreifen da sind, diejenigen mit kleinen Ordnungszahlen, das sind die, die sich dem steilen Intensitätsabfall an der Grenze der Totalreflexion überlagern, für die Auswertung unberücksichtigt lassen.

Die meisten für die optischen Untersuchungen in Frage kommenden Schichten hatten nun eine solche Dicke, daß die Interferenzsaufnahmen 2—3 Streifen zeigten. Um hier die Dicke röntgenologisch bestimmen zu können, wurde folgendermaßen verfahren.

Statt die Dicke nach Formel (3) aus der Kombination zweier Extrema zu bestimmen, kann man sie auch, wenn man  $\delta = 1 - n$  kennt [vgl. Formel (4)], aus  $\delta$  und einem Interferenzstreifen berechnen. Es gilt nämlich

$$(5) \quad D = \frac{1}{2} \frac{m \lambda}{\sqrt{q^2 - 2\delta}}$$

Die Kupferschicht (Nr. 9 der Tab. 2) zeigte nun mehrere gut ausgeprägte Interferenzstreifen. Die beiden mit der kleinsten Ordnungszahl wurden nun aus den oben erwähnten Gründen für die Auswertung unberücksichtigt gelassen. Aus den übrigen Streifen wurde dann, indem aus mehreren Kombinationen der Mittelwert gebildet wurde,  $\delta$  nach (4) berechnet. Es ergab sich  $\delta = (22,3 \pm 1,3) \cdot 10^{-6}$ . Die Kupferschichten Nr. 1 und 3 der Tab. 2 ergaben (allerdings ohne Mittelwertbildung): Schicht Nr. 1:  $\delta = 21,5 \cdot 10^{-6}$  und Schicht Nr. 3:  $\delta = 21,9 \cdot 10^{-6}$ . Mit dem Mittelwert aus diesen

$$\delta = (21,9 \pm 1,3) \cdot 10^{-6}$$

wurde nun bei den übrigen Schichten, die nicht so viele Interferenzstreifen zeigten, nach (5) die Dicke berechnet.

Die Bestimmung der Ordnungszahl, die einem Interferenzstreifen tatsächlich zukommt, wurde in allen Fällen nach der von R. Riedmiller<sup>1)</sup> angegebenen Methode vorgenommen. Es sei erwähnt, daß die Bestimmung der Zuordnung aus der Kombination von drei Interferenzstreifen sich als zu ungenau erwies<sup>2)</sup>. Ebenfalls zeigten die sich bei einer bestimmten Zuordnung aus den verschiedenen Kombi-

1) R. Riedmiller, Ann. d. Phys. [5] 20. S. 377. 1934.

2) Vgl. dagegen H. Gierok, a. a. O., S. 10.

nationen ergebenden Dicken keinen so systematischen Gang, wenn die Zuordnung um eine Einheit zu groß oder zu klein war, wie dies R. Riedmiller bei Dicken von etwa  $80 \mu$  gefunden hat.

Tab. 1 zeigt ein Beispiel.

Tabelle 1

	$m - 1$	$m$	$m + 1$
Dicke in $\mu$ berechnet aus je einem Extremum und $\delta$	8,43 11,22 12,85	16,86 18,71 18,01	25,30 26,19 23,18
Mittelwerte:	10,83	17,86	24,90
Abweichungen der Einzel- werte vom Mittelwert	2,40 0,39 2,02	1,00 0,85 0,15	1,71 1,30 0,41
Mittelwerte:	1,06	0,7	1,1

Der Rechnung zugrunde liegt die Kupferschicht Nr. 4. Es war hier möglich, aus je drei Extrema die Dicken zu berechnen und aus ihnen den Mittelwert zu bilden. Die mit  $m - 1$  bezeichnete Spalte enthält die Werte, die man erhält, wenn man dem ersten Intensitätsmaximum  $1/2$  zuordnet, der mit  $m$  bezeichneten Spalte entspricht die Zuordnungszahl  $3/2$  und der mit  $m + 1$  bezeichneten Spalte die Zuordnungszahl  $5/2$  für das erste Intensitätsmaximum. Die einzelnen Dicken weichen bei der mit  $m$  bezeichneten Zuordnung am wenigsten voneinander ab, deshalb wird diese Zuordnung als die richtige angesehen und für Dicke ergibt sich somit der Wert  $17,8 \mu$ .

#### § 4. Experimenteller Teil

##### a) Herstellung der Schichten

Die Schichten wurden hergestellt durch Aufdampfen des betreffenden Metalls auf Glas im Hochvakuum. Die benutzten Glasplatten, die wegen der optischen Untersuchung möglichst spannungsfrei sein mußten, waren dieselben, die auch Essers-Rheindorf benutzt hat. Die Nutzfläche betrug  $8 \times 1,5 \text{ cm}^2$  und der Brechungsindex war für  $\lambda = 546 \mu$ :  $n = 1,515$ .

Die im folgenden aufgeführten Goldmessungen wurden mit der bei Essers-Rheindorf beschriebenen Aufdampfanlage hergestellt, bei der aus einem Molybdänschälchen aufgedampft wurde und das Vakuum mit Hilfe eines Funkeninduktors geprüft wurde. Die Dicke der Schicht wurde dadurch reguliert, daß bei jedem Aufdampfprozeß eine abgewogene Menge Gold restlos verdampft wurde. Da bei Gold die Verhältnisse für einen Vergleich der Dickenbestimmung

aus Polarisations- und Röntgeninterferenzmessungen sehr ungünstig liegen (vgl. S. 482), so wurden Messungen an Kupferschichten herangezogen. Alle diese Kupferschichten wurden unter den von R. Kretzmann<sup>1)</sup> bereits mitgeteilten wesentlich besseren Aufdampfbedingungen hergestellt. Die wesentlichen Änderungen des Aufdampfverfahrens sind folgende. Das Vakuum wurde mit Hilfe eines Ionisationsmanometers geprüft, und es wurde erst bei einem Druck von  $10^{-5}$  Torr aufgedampft (früher einige  $10^{-3}$  Torr). Aufgedampft wurde aus zwei Molybdänschälchen und so viel Metall in diese gelegt, daß nach dem Aufdampfen immer noch Metall in ihnen war. Da für das Auftreten der Interferenzen möglichst planparallele Schichten erforderlich sind, wurde, um dies zu erreichen, der Abstand Aufdampfschälchen-Glasunterlage so groß gemacht, wie es der vorhandene Rezipient erlaubte. Dieser Abstand betrug 21 cm. Es wurde immer nur einmal aufgedampft und die Schichtdicke grob durch die Aufdampfzeit reguliert. Diese Zeit betrug 10–35 Sek.

#### b) Messung mit dem Polarisationspektrometer

Nach der Herausnahme der Schicht aus dem Vakuum wurde zunächst mit einem Photometer festgestellt, ob die Schicht eine gleichmäßige Dicke hatte. Alle nach obigem Verfahren hergestellten Schichten erwiesen sich als gut brauchbar.

Die eigentliche optische Messung, d. h. die Messung der Azimute  $[X_r]$ ,  $[X_r^*]$ ,  $[X_D]$  und der Phasen  $\delta_r$ ,  $\delta_r^*$ ,  $\delta_D$  wurde daran anschließend mit dem Polarisationspektrometer vorgenommen. Die Versuchsanordnung, bestehend aus Wolframpunktlichtlampe von 110 Watt, Monochromator, der auf die grüne Quecksilberlinie ( $\lambda = 546 \text{ m}\mu$ ) eingestellt war, und Polarisationspektrometer mit Babinet-Soleil-Kompensator ist bei Essers-Rheindorf eingehend beschrieben<sup>2)</sup>.

#### c) Röntgenröhre, Hochspannungsanlage und Röntgenpektrometer

Die Röntgenstrahlen wurden mittels einer in der Werkstatt des Instituts gebauten Glühkathodenröhre aus Metall erzeugt<sup>3)</sup>. Die Antikathode war aus massivem Kupfer. Sämtliche Aufnahmen wurden mit dem Duplet der  $\text{CuK}_\alpha$ -Linie gemacht. Die Belastung der Röhre

1) R. Kretzmann, Ann. d. Phys. [5] **37**, S. 303. 1940.

2) G. Essers-Rheindorf, a. a. O. S. 301.

3) Über die Bauart der Röhre vgl. z. B. H. Ott, Phys. Zschr. **27**, S. 568. 1926; Handb. d. Exp.-Phys. **24**, I, S. 41.

betrug bei etwa 40 kV 25—30 mA Emission. Die Röhre war über ein Tombakrohr und eine mit flüssiger Luft gekühlte Ausfrierflasche mit einer dreistufigen elektrisch heizbaren Quecksilber-Diffusionspumpe von Leybold verbunden. Vor Einschalten des Heizstromes wurde 1 Std. gepumpt, um ein möglichst gutes Hochvakuum zu erzielen.

Als Hochspannungsquelle diente die Stabilivoltanlage des Institutes. Der Betriebsstrom dieser Anlage wurde einem 500-Perioden-Generator entnommen, der seinerseits von einem an das städtische Netz angeschlossenen Motor angetrieben wurde. Die durch Netzschwankungen bedingten Schwankungen der Hochspannung waren für die Interferenznahmen belanglos, da die Expositionszeit 6 bis 15 Std. betrug.

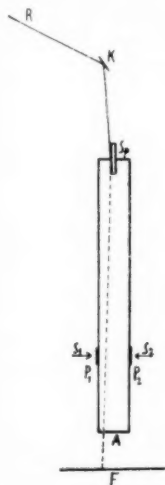


Abb. 2a. Röntgenstrahlengang

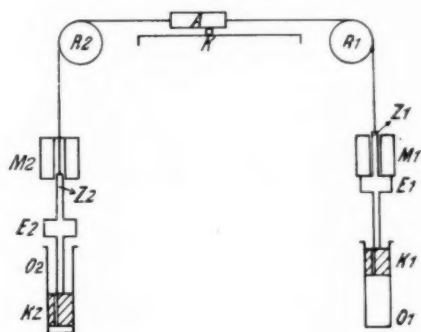


Abb. 2b. Drehvorrichtung

Das Spektrometer zur Erzeugung monochromatischer Röntgenstrahlen war prinzipiell so gebaut wie bei Kiessig und Gierok beschrieben. In der Abb. 2a bedeutet:  $R$  von der Röhre kommender Strahl,  $K$  Kalkspatkristall,  $Sp$  Glasplatte mit der Schicht,  $F$  Film. Die Justierung wurde wie bei Kiessig und Gierok beschrieben, vorgenommen.

Die Drehung des Spiegels wurde folgendermaßen erreicht. An dem einen Ende des drehbaren Armes, das auf einer Metallkugel  $K$  rollt (vgl. Abb. 2b) ist an jeder Seite ein Phosphorbronzedraht befestigt, der über eine Rolle  $R_1$  bzw.  $R_2$  zu den Zylindern  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  führt, diese ragen zum Teil in die Spulen  $M_1$  bzw.  $M_2$  hinein. Diese Zylinder tragen an dem unteren Ende schwere Eisenzylinder  $E_1$

bzw.  $E_2$ . Die mit diesen festverbundenen Kolben  $K_1$  bzw.  $K_2$  bewegen sich in den mit Öl gefüllten Gefäßen  $O_1$  bzw.  $O_2$ . Bei der Bewegung strömt das Öl durch eine Bohrung in den Kolben, wodurch eine konstante Geschwindigkeit erreicht wird. Fließt nun durch  $M_1$  ein Strom, so wird  $E_1$  von  $M_1$  angezogen.  $E_2$  zieht dann durch sein Gewicht den Arm auf  $R_2$  zu, und zwar so lange, bis die Schiene die Spitze  $S_2$  (vgl. Abb. 2a) berührt. Durch diesen Kontakt wird ein Relais betätigt und der Strom von der Spule  $M_1$  auf die Spule  $M_2$  geschaltet. Dann geht die Bewegung in umgekehrter Richtung vor sich, bis die Schiene  $S_1$  berührt, usw. Die Spitzen von  $S_1$  und  $S_2$  und ebenso die Stellen  $P_1$  und  $P_2$  der Schiene, die zur Berührung kommen, waren aus Platin; diese Art von Kontakt hat sich sehr gut bewährt. Die Schwenkvorrichtung ist nie infolge schlechten Kontaktes stehen geblieben. Daß die Drehung des Spiegels gleichmäßig erfolgte, wurde folgendermaßen geprüft. Der Spiegel wurde entfernt, an dem anderen Ende des Armes bei  $A$  ein in Papier gehüllter Film befestigt und der vom Kristall kommende Strahl direkt auf diesen Film fallen gelassen, während die Schwenkvorrichtung in Betrieb war. Nach etwa 20 Min. wurde abgeschaltet und der Film entwickelt. Das Ergebnis war eine vollkommen gleichmäßige Schwärzung des Films, wie photometrisch festgestellt wurde. Selbst an den Umkehrstellen konnte keine größere Schwärzung festgestellt werden, ein Zeichen dafür, daß der Umschaltvorgang in äußerst kurzer Zeit stattfindet.

Als Film wurde höchst empfindlicher, doppelseitig begossener Agfa-Röntgenfilm benutzt. Die Aufnahmen der Interferenzstreifen wurden mit einem Registrierphotometer von Zeiss im Übersetzungsverhältnis 1:3,85 photometriert und die so erhaltenen Kurven mit einem Komparator ausgemessen.

Da, wie Kiessig<sup>1)</sup> gezeigt hat, es für die Interferenzaufnahme günstig ist, die  $K_\alpha$ -Linie des zu untersuchenden Materials zu nehmen, wurde, da die Cu- $K_\alpha$ -Linien leicht zu erzeugen waren, für die vergleichende Dickenmessung ausschließlich dünne Kupferschichten verwandt.

#### § 5. Ergebnisse der vergleichenden Dickenbestimmung

Wie bereits erwähnt, war ein Ziel der Untersuchung, durch vergleichende Dickenbestimmung die Brauchbarkeit der neuen Methode zur Berechnung von  $n$  und  $k$  festzustellen. Die Rechnung zeigt<sup>2)</sup>, daß diese unbrauchbar wird, wenn die Absorption des Lichtes

1) H. Kiessig, a. a. O., S. 772.

2) K. Försterling, a. a. O., S. 750.



beim Hin- und Hergang in solchen Schichten so groß ist, daß die Zickzackreflexionen keinen Einfluß auf die Beobachtung mehr haben. Bei Kupfer ist das bei 35  $m\mu$  der Fall.

Tabelle 2  
Kupferschichten

Nr.	$D$ (opt.)	$D$ (Interfer.)			Mittlerer Fehler		
		$m - 1$	$m$	$m + 1$	$m - 1$	$m$	$m + 1$
7	$16,9 + i 1,1$	5,4	13,2	20,9	0,7	1,0	2,6
4	$17,8 - i 0,5$	10,8	17,8	24,8	1,6	0,7	1,1
5	$18,9 + i 1,3$	5,5	13,4	21,4	0,8	0,9	2,5
3	$21,8 - i 2,2$	18,8	22,3	25,3	0,5	0,6	0,8
1	$28,3 - i 2,2$	23,3	30,5	36,3	0,9	0,8	1,2
10	$29,9 - i 1,9$	20,8	30,2	39,5	0,7	0,03	0,8
9	$30,9 - i 4,4$	28,2	30,8	34,4	1,0	0,4	0,9
11	$33,7 + i 1,3$	24,4	33,9	43,5	1,2	0,9	2,5

Die Tab. 2 enthält die nach den beiden Methoden sich ergebenden Resultate von 8 Kupferschichten. In der zweiten Spalte stehen die aus den optischen Messungen nach der strengen Formel (1) berechneten Größen. Die dritte bis fünfte Spalte enthalten die aus den Röntgenstrahlinterferenzen sich ergebenden Dicken, und zwar sind die unter  $m$  stehenden Zahlen die aus der richtigen Zuordnung sich ergebenden Dicken, die unter  $m - 1$  stehenden Zahlen sind die Dicken, die sich bei der um 1 kleineren Zuordnung ergeben und unter  $m + 1$  stehen die Dicken, die der um 1 größeren Zuordnung entsprechen. Bei den Schichten Nr. 3, 1 und 9 wurde die Dicke nach Formel (3) berechnet, also aus der Kombination je zweier Interferenzstreifen. Die dazu gehörenden Aufnahmen hatten mehrere gut auswertbare Interferenzstreifen. Bei den übrigen Schichten wurde die Dicke nach Formel (5) berechnet, bei den meisten Schichten konnte auch hier noch ein Mittelwert aus zwei oder drei Werten gebildet werden.

Zu dieser Tabelle ist nun folgendes zu bemerken. Die Schicht Nr. 9 zeigt (vgl. Abb. 3) mehrere gut ausgeprägte Interferenzstreifen, auf sie wurde zunächst das Verfahren zur Bestimmung der Zuordnungszahl angewandt. Für diese Schicht wurde das Interferenzbild auch noch für die Zuordnung  $m + 2$  durchgerechnet. Es ergab sich  $D = 37,3 m\mu$  und der mittlere Fehler zu 1,1.

Man sieht, daß der dieser Zuordnung entsprechende mittlere Fehler größer ist als der  $m + 1$  entsprechende. Die sehr gute Übereinstimmung zwischen der nach der optischen Methode berechneten und der aus den Interferenzen gefundenen Dicke dieser

Schicht dürfte etwas zufällig sein, zumal wenn man beachtet, daß der bei der optischen Methode sich ergebende Imaginärteil gerade hier verhältnismäßig groß ist ( $14,2\%$ ). Die Schichten Nr. 1, 10 und 11 zeigen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den auf beide Arten gefundenen Dicken. Man sieht auch, daß bei

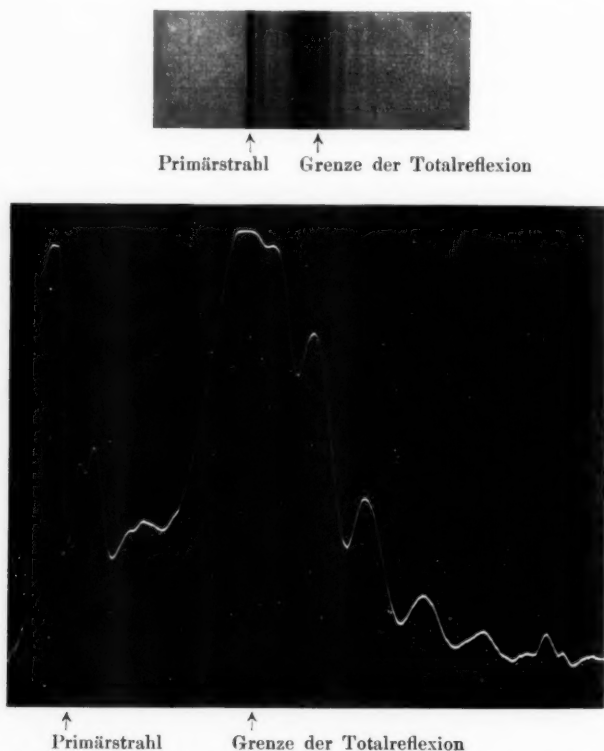


Abb. 3. Interferenzaufnahme und Registrierkurve der Kupferschicht Nr. 9

diesen Schichten die Möglichkeit, die Zuordnung wie oben geschildert zu finden, eindeutig ist. Diese Schichten haben Dicken zwischen 28 und  $34\mu$ . Bei den dünneren Schichten war es nur bei der Schicht Nr. 4 möglich, die Zuordnung eindeutig festzustellen. Auch hier ergibt sich sehr gute Übereinstimmung der Dicken. Bei Schicht Nr. 3 ist die röntgenologische Dickenbestimmung nicht eindeutig, und zwar deshalb nicht, weil die Zuordnung sich nicht eindeutig feststellen ließ.

Die Interferenzaufnahme der Schicht Nr. 5 zeigte leider nur einen gut ausgeprägten Interferenzstreifen. Es wurde nun die Dicke zunächst mit Hilfe von  $\delta$  aus dem ersten Intensitätsmaximum und dem darauffolgenden Minimum berechnet. Eine Möglichkeit, die Zuordnung und damit die Schichtdicke eindeutig zu bestimmen, war so nicht gegeben. Dies liegt daran, daß das bei der Berechnung benutzte Intensitätsmaximum zu nahe an der Grenze der Totalreflexion liegt und sich somit seine wirkliche Lage nicht ohne weiteres feststellen läßt. Es wurde deshalb die Schichtdicke bestimmt allein aus  $\delta$  und dem zweiten Intensitätsminimum, das ziemlich nahe am Ende des steilen Intensitätsabfalls liegt. Das Ergebnis zeigt Tab. 3 in der zweiten Zeile. Die erste Zeile enthält nochmals die Werte der Tab. 2.

Tabelle 3

	$m - 1$	$m$	$m + 1$	$m + 2$
Dicke in $m\mu$ {	5,5	13,4	21,4	29,3
	6,3	12,6	18,9	25,2

Der der Zuordnung  $m + 1$  entsprechende Wert stimmt sehr gut mit dem optisch gemessenen überein.  $D(\text{opt.}) = 18,9 m\mu$ . Man kann also diesen Wert immerhin als die richtige Dicke ansehen. Bei der noch dünneren Schicht 7 konnte das erste Intensitätsmaximum aus denselben Gründen wie oben zur Auswertung nicht benutzt werden und die genaue Lage des zweiten Intensitätsminimums konnte nicht mehr festgestellt werden. Die Schicht schied somit für die röntgenologische Dickenbestimmung aus. Bei einer noch dünneren Schicht — optische Messung  $10,5 m\mu$  — wurde selbst nach 5stündiger Expositionszeit kein Interferenzstreifen mehr erhalten.

Man sieht also, daß unterhalb von etwa  $18 m\mu$  eine Dickenbestimmung an dünnen Kupferschichten aus den Röntgenstrahlinterferenzen nicht mehr möglich ist. Auf den Aufnahmen ist nur ein Maximum von merklicher Intensität vorhanden, während das zweite bereits in einer solchen Entfernung von der Grenze der Totalreflexion liegt, in die keine merkbare Intensität der reflektierten Strahlung gelangt.

Bei zwei Schichten wurde die Dicke auch noch durch Wägung bestimmt<sup>1)</sup>. Zu diesem Zwecke wurde in gleicher Entfernung von den Aufdampfschälchen, in der sich die für die optischen Untersuchungen benutzten Glasplatten befanden, ein sehr dünnes Deck-

1) Die Wägung wurde mit der Mikrowaage des chemischen Instituts ausgeführt.

gläschen befestigt und mitbedampft. Man kann nun annehmen, daß die Dicke der Schicht auf beiden Unterlagen dieselbe ist. Unter der Annahme, daß die Dichte der aufgedampften Schicht dieselbe ist wie die von massivem Kupfer wurde dann aus dem Gewicht die Dicke der Schicht berechnet. Die erhaltenen Resultate zeigt Tab. 4.

Tabelle 4

Nr.	$D$ (opt.)	$D$ (Wäg.)	Dichte	$\delta$
11	33,9	27,9	7,35	17,6
12	27,9	24,5	7,48	16,2

Die in der dritten Spalte stehenden Dicken, die aus dem Gewicht berechnet sind unter der Annahme, daß die Dichte  $8,93 \text{ g/cm}^3$  ist, zeigen, daß diese Annahme nicht erfüllt ist, sondern die Dichte dieser Schichten, wie auch von anderen Autoren für andere Metalle gefunden, geringer ist als die von massivem Kupfer. Die vierte Spalte enthält die aus dem Gewicht und der optisch gemessenen Dicke berechnete Dichte. Die letzte Spalte enthält die Abweichungen in Prozenten.

Es sei ausdrücklich erwähnt, daß bei Schicht Nr. 11 die aus dem Gewicht und der Dichte von massivem Kupfer berechnete Schichtdicke von  $27,9 \mu$  nicht nur mit dem optisch bestimmten Wert von  $33,9 \mu$  nicht übereinstimmt, sondern auch mit keinem der Werte übereinstimmt, die sich aus den Röntgenstrahlinterferenzen für die verschiedenen Zuordnungen ergeben. Diese Werte sind (vgl. Tab. 2):  $24,4$ ,  $33,9$  und  $43,5 \mu$ .

Zusammenfassend kann man also sagen, daß die Dickenbestimmung einer dünnen Kupferschicht aus den Polarisationszuständen des an ihr reflektierten und von ihr durchgelassenen Lichtes und aus den Interferenzen von Röntgenstrahlen an einer solchen Schicht innerhalb eines Bereiches von etwa  $18-35 \mu$  zu demselben Wert für die Dicke führen. D. h. aber, daß innerhalb dieses Bereiches die neue Methode zur Bestimmung der optischen Konstanten jedenfalls anwendbar ist.

#### § 6. Ergebnisse der optischen Untersuchung

Wie bereits erwähnt, versagt bei dickeren Schichten die optische Methode der Dickenbestimmung. Ein Kriterium dafür, daß die Dicke der Schicht noch einen merkbaren Einfluß auf die Polarisationszustände des Lichtes hat, liefert die komplexe Größe

$$\frac{r_p' - r_p}{r_p' + r_p} A.$$

Der absolute Betrag hiervon darf, wenn die Dickenbestimmung noch sinnvoll sein soll, nicht zu nahe bei Eins liegen<sup>1)</sup>. Die Tab. 5 enthält für einige Schichten diesen Wert berechnet aus den beobachteten Daten.

Tabelle 5

Metall	$D$ in $m\mu$	$\frac{r_p' - r_p}{r_p' + r_p} A$
Kupfer Nr. 7	16,9	6,7
Kupfer Nr. 9	30,9	1,3
Kupfer Nr. 11	33,7	1,3
Kupfer	etwa 40	1,09
Gold	7,2	5,1
Gold	über 25	1,3

Bei der letzten Goldschicht ist die Dicke nur grob geschätzt. Man sieht sofort, daß bei dünneren Schichten dieser Ausdruck erheblich von 1 abweicht. Bei der letzten Kupferschicht ist die Dicke von 40  $m\mu$  geschätzt auf Grund einer Wägung, die  $D = 35,7 m\mu$  ergab. Die Schicht war nämlich bereits so dick, daß die Messung des Polarisationszustandes des durchgegangenen Lichtes mit genügender Sicherheit nicht mehr möglich war. Die optischen Konstanten solcher Schichten bestimmt man zweckmäßig aus dem Haupteinfallswinkel und dem Hauptazimut.

Zur Berechnung der Dicke wurde oben außer der strengen Formel (1) die Näherungsformel (2) angegeben. Die Tab. 6 enthält die nach beiden Formeln berechneten Größen einiger Schichten. Sowohl bei Kupfer- als auch bei Goldschichten kann man bei einer Schichtdicke von 18—20  $m\mu$  ab nach der Näherungsformel rechnen. Die Berechnung der Dicke wird dadurch ganz erheblich vereinfacht.

Tabelle 6

Metall	$(D \text{ streng})$	$D \text{ (Näherung)}$
Kupfer Nr. 1	28,3 - i 2,2	23,9 - i 3,6
Kupfer Nr. 3	21,8 - i 2,2	20,1 + i 3,2
Kupfer Nr. 7	16,9 + i 1,1	16,1 + i 0,2
Kupfer Nr. 6	10,5 + i 2,8	10,5 + i 2,6
Gold	7,2 + i 0,7	7,2 + i 0,6

Es wurden nun die optischen Konstanten einiger dünner Metallschichten nach der neuen Methode bestimmt. Dabei interessierte

1) K. Försterling, a. a. O., S. 751.

besonders, ob das von mehreren Autoren<sup>1)</sup> bei verschiedenen Metallen beobachtete Zunehmen von  $n$  und Abnehmen von  $k$  mit abnehmender Schichtdicke sich auch nach der neuen Methode ergab. Zunächst wurden nun dünne Goldschichten untersucht. Die Schichten wurden hergestellt nach dem ersten oben beschriebenen Verfahren. Die Dicken wurden nach der Näherungsformel (2) berechnet. Tab. 7 zeigt die an zwölf Goldschichten erhaltenen Resultate.

Tabelle 7

Gold

Nr.	$n$	$k$	$D$
1	0,52	1,94	15,3 + i 2,2
4	0,63	2,09	11,1 + i 2,2
8	0,77	2,18	9,4 + i 1,1
3	0,71	1,77	9,2 + i 2,7
9	0,52	2,17	9,1 + i 2,7
5	0,51	2,22	8,8 + i 2,8
2	0,64	2,25	7,6 + i 1,1
6	0,74	2,31	4,9 + i 2,4
7	0,90	2,83	3,8 + i 1,4
10	0,79	2,70	3,1 + i 1,8
11	0,66	2,12	2,3 + i 2,2
12	0,75	2,20	1,8 + i 1,9

Man sieht, daß von einer Zunahme von  $n$  mit abnehmender Schichtdicke nicht gesprochen werden kann. Der Absorptionskoeffizient  $k$  nimmt zunächst etwas zu und von einer Dicke von  $4\mu$  an nimmt er wieder ab. Auffallend ist, daß der imaginäre Teil in dem komplexen Ausdruck für  $D$  sich mit abnehmender Schichtdicke dem reellen Teil immer mehr nähert und bei der letzten Schicht sogar größer ist. Da, wie weiter unten gezeigt wird, die regellose Streuung von  $n$  und  $k$  außerhalb der Meßgenauigkeit liegt, kann man aus obigen Resultaten nur den Schluß ziehen, daß die der Theorie zugrunde liegende Voraussetzung einer isotropen homogenen Schicht für diese extrem dünnen Schichten nicht mehr erfüllt ist.

Um nun festzustellen, für welche Schichten diese Methode anwendbar ist, wurde die bereits geschilderte vergleichende Dickenbestimmung durchgeführt. Da die optische Dickenbestimmung bei Goldschichten oberhalb  $20\mu$  schon unbrauchbar wird (vgl. Tab. 5), wurden diese Messungen an Kupferschichten vorgenommen. Tab. 8

1) Z. B. B. Pogany, a. a. O., S. 552; W. Planck, Phys. Ztschr. 15. S. 563. 1914; H. Murmann, Ztschr. f. Phys. 80. S. 161. 1933; G. Essers-Rheindorf, a. a. O., S. 315; J. Krautkrämer, Ann. d. Phys. [5] 32. S. 537. 1938.

enthält die Resultate. In der letzten Spalte stehen nochmals die aus den Röntgenstrahlinterferenzen sich ergebenden Dicken. Alle diese Schichten wurden nach dem zweiten Aufdampfverfahren hergestellt. Die Dicke wurde immer nach der strengen Formel (1) berechnet. Von den Schichten Nr. 8, 2 und 12 wurde infolge Undichtwerden der Röntgenröhre keine Interferenzaufnahme erhalten. Über Schicht Nr. 5 wurde bereits oben (S. 479) ausführlich gesprochen und Schicht Nr. 6 war zu dünn, um noch Interferenzstreifen zu liefern. Da die vergleichende Dickenbestimmung zeigt, daß innerhalb des Bereiches von 18—35  $m\mu$  die neue Methode anwendbar ist, kann man wohl annehmen, daß sie für dünnere Schichten so lange anwendbar ist, als das oben angeführte Kriterium [Quotient Imaginärteil zu Realteil in Gl. (1) bzw. (2) klein] erfüllt ist.

Tabelle 8  
Kupfer

Nr.	$n$	$k$	$D$ (opt.)	$D$ (rö.)
6	0,95	1,80	10,5 + i 2,8	—
7	0,91	2,24	16,9 + i 1,1	13,2
4	1,03	2,13	17,8 + i 0,5	17,8
5	0,88	2,25	18,9 + i 1,3	—
3	1,07	2,26	21,8 + i 2,2	22,3
12	0,97	2,17	27,9 + i 1,6	—
8	0,99	2,15	28,2 + i 1,1	—
1	1,05	2,58	28,3 + i 2,2	30,5
10	0,88	2,16	29,9 + i 1,9	30,2
9	1,03	2,46	30,9 + i 4,4	30,8
11	0,93	2,17	33,7 + i 1,3	33,9
2	1,10	2,68	34,2 + i 7,5	—

#### § 7. Genauigkeit der Messung

Um die Änderung von  $n$ ,  $k$  und  $D$  in Abhängigkeit von den Änderungen der gemessenen Phasen und Azimute festzustellen, erwies es sich wegen der äußerst komplizierten Funktionen, durch die diese Größen zusammenhängen, als hoffnungslos,  $dn$ ,  $dk$  und  $dD$  explizit als Funktion von  $d[\chi_r]$ ,  $d[\chi_r^*]$  usw. auszudrücken. Es wurde deshalb jeweils eins der gemessenen Azimute oder eine der Phasen um 30' geändert und mit diesen neuen Werten die Berechnung von  $n$ ,  $k$  und  $D$  durchgeführt. Es ergibt sich dann für die bei der Kupferschicht Nr. 9 vorliegenden Verhältnisse eine Änderung für  $n$ : 23,5%,  $k$ : 12,5% und  $D$ : 26,2%. Die tatsächliche mittlere Abweichung der einzelnen Messung von dem Mittelwert beträgt für die Azimute etwa 7 Min. und die Phasen 10 Min. Nimmt man an, daß in dem Bereich von 30 Min. die Abhängigkeit von  $dn$ ,  $dk$  und  $dD$  von  $d[\chi_r]$ ,  $d[\chi_r^*]$  usw. linear ist, so ergibt sich, daß der durch

die Messung bedingte Fehler im Mittel in  $n$  6%, in  $k$  4% und in  $D$  7% betragen kann. Ebenso ergibt sich für eine dünne Goldschicht die den mittleren Meßfehlern entsprechende Abweichung im Mittel zu 8% bei  $n$ , 3% bei  $k$  und 5% bei  $D$ . Die Streuung der optischen Konstanten der Tab. 8 liegt also außerhalb des Meßfehlers.

#### § 8. Diskussion der Resultate der optischen Messungen

Es wurde auch eine dünne Goldschicht nach dem zweiten besseren Aufdampfverfahren hergestellt. Die Auswertung der Meßresultate ergab:  $n = 0,97$ ;  $k = 2,01$ ;  $D = 7,1 + i \cdot 0,6$ . Vergleicht man diese Werte mit denen der Tab. 7, so fällt auf, daß der Imaginärteil in dem komplexen Ausdruck für  $D$  bei obiger Schicht verhältnismäßig klein ist, nämlich 9,5% des Realteils, während bei der Schicht Nr. 2 der Tab. 7 der Imaginärteil 15% des Realteils ausmacht. Die Realteile selbst sind dabei fast gleich. Auch ist  $n$  größer als die entsprechenden Werte der Tab. 7, während  $k$  nur von den zu den Schichten Nr. 1 und 3 gehörenden Werten untertroffen wird. Da obige Schicht nach dem zweiten wesentlich besseren Aufdampfverfahren hergestellt wurde, kann man diese Tatsache als durch das Aufdampfverfahren bedingt ansehen.

Im übrigen kann die starke Streuung der optischen Konstanten der sehr dünnen Goldschichten (Tab. 7), die, wie oben gezeigt, außerhalb der Meßgenauigkeit liegt, und das prozentual starke Anwachsen des Imaginärteils in dem komplexen Ausdruck für  $D$  nur dadurch bedingt sein, daß die Schicht nicht mehr optisch homogen ist, also die der Ableitung der Formeln zugrunde liegende Annahme nicht mehr erfüllt ist. Daß diese Annahme für sehr dünne Schichten nicht mehr gilt, ist durch Elektroneninterferenzen gezeigt worden<sup>1)</sup>.

Die regellose Streuung der optischen Konstanten der Kupferschichten (Tab. 8) kann man bei den Schichten, bei denen die aus den Röntgenstrahlinterferenzen und aus den optischen Messungen gerechneten Dicken gut übereinstimmen (Schicht Nr. 4, 1, 10, 9, 11), wohl nicht durch die Annahme einer optischen Inhomogenität der Schicht deuten; denn dann wäre die gute Übereinstimmung der auf verschiedene Arten gefundenen Dicken unverständlich. Die Streuung kann man hier dadurch erklären, daß jede Schicht einzeln hergestellt wurde und die Herstellungsbedingungen nicht in jedem Falle dieselben waren. Man kann auch an die Einwirkung durch Oberflächenschichten infolge Oxydation des Metalls denken. Diese Tatsache spielt selbstverständlich auch bei der Streuung der Goldschichten

1) z. B. J. Krautkrämer, a. a. O., S. 566, dort auch weitere Literaturangaben.



mit. Eine durch Oxydschichtbildung erklärbare Veränderung der optischen Konstanten von im Vakuum hergestellten dünnen Metallschichten bei Luftzutritt wurde auch von Hass<sup>1)</sup> gefunden.

#### § 9. Zusammenfassung

Es wird eine neue von Försterling angegebene Methode zur Bestimmung der optischen Konstanten  $n$  und  $k$  sehr dünner Metallschichten auf ihre Anwendbarkeit hin geprüft, indem die Dicke der Schicht (der Untersuchung zugrunde liegen Kupferschichten) einerseits aus den optischen Konstanten, andererseits aus den von Kiessig entdeckten Röntgenstrahlinterferenzen an dünnen Metallschichten berechnet wird. Dabei ergibt sich, daß in dem Bereich von 18 bis 35  $m\mu$ , in dem überhaupt beide Methoden praktisch eine Dickenbestimmung gestatten, gute Übereinstimmung der Resultate vorhanden ist, die neue Methode zur Bestimmung von  $n$  und  $k$  in diesem Bereich also sicher brauchbar ist. Die Untersuchungen an sehr dünnen Schichten zeigen, daß für solche die der Theorie zugrunde liegenden Annahmen nicht mehr erfüllt sind.

Diese Arbeit wurde im Institut für theoretische Physik der Universität Köln ausgeführt. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Försterling für die Anregung zu dieser Arbeit und sein dauerndes förderndes Interesse. Ich danke auch Herrn Prof. Dr. J. Malsch und Herrn Dr. J. Krautkrämer für manchen wertvollen Rat, Herrn Werkmeister F. Braune für die Anfertigung der Röntgenröhre, sowie der Johann-Hampsohn-Stiftung und der Helmholtz-Gesellschaft, die durch finanzielle Unterstützung die Untersuchungen ermöglichten.

1) G. Hass, Ann. d. Phys. [5] 10. S. 245. 1938.

Köln, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 12. September 1940)

## Die Absorptionsspektren einiger Zinksulfidphosphore im angeregten Zustand

Von Alois Hoch

(Mit 8 Abbildungen)

### § 1. Aufgabe und Übersicht

Zinksulfid zeigt, wie die meisten anderen Schwermetallsulfide oder allgemein alle Kristalle mit hohen Brechzahlen, lichtelektrische Leitung<sup>1)</sup>. Durch bestimmte Nebenbedingungen, unter diesen meist spurenweiser Zusatz anderer Schwermetallsulfide, bekommen die

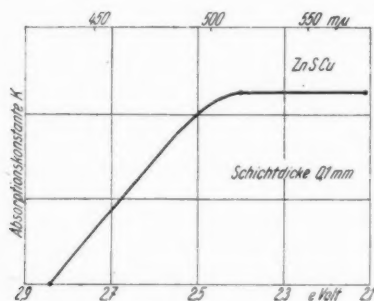


Abb. 1. Absorptionsspektrum der angeregten Zustände  
von ZnSCu nach P. Lenard

Zinksulfide zusätzlich die Eigenschaft der Phosphoreszenz. Sie haben sich als Leuchtstoffe in der Technik weitgehend durchgesetzt. Bei diesen Leuchtstoffen sind Erregung und Emission aufs engste mit den Vorgängen der lichtelektrischen Leitung verknüpft<sup>2)</sup>. Diese hat sich selbst in ihren einfachsten Fällen (Alkalihalogenide) nur aufklären lassen, nachdem die mit der Lichtabsorption verknüpften Änderungen der Spektren auf optischem Wege

1) B. Gudden u. R. W. Pohl, Ztschr. f. Phys. 5. S. 176. 1921; 16. S. 42. 1923.

2) B. Gudden u. R. W. Pohl, Ztschr. f. Phys. 3. S. 98. 1920; 4. S. 206. 1921; insbesondere 35. S. 240. 1925. § 7.

ausgemessen waren. Das gleiche dürfte unseres Erachtens in noch stärkerem Maße zum Verständnis der Phosphoreszenzvorgänge notwendig sein, wenn man zu einem experimentell begründeten Termschema gelangen will. Leider liegen bislang nur wenige Messungen vor<sup>1)</sup>. Die Abb. 1 zeigt als Beispiel die von Lenard gemessene Lichtabsorption, die bei dem wichtigen Zinksulfidkupferphosphor durch die Bildung angeregter Zustände hervorgerufen wird. Diese nur mit wenigen Meßpunkten gestützte Kurve umfaßt den Bereich von 430—600  $\mu$  und läßt keinerlei Selektivitäten erkennen.

Bei dieser Sachlage war es notwendig, trotz der bekannten Schwierigkeiten, die durch die Pulverstruktur der Leuchtstoffe bedingt sind, noch einmal den Versuch zu machen, für einige Zinksulfidphosphore näheres über die Absorptionsspektren der angeregten Zustände zu ermitteln. Das ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

## § 2. Versuchsanordnung

Zur Verwendung gelangten technische Phosphore<sup>2)</sup>, wie sie im Großbetrieb hergestellt werden. Dies ist vor allem für reinstes Zinksulfid ohne Zusatz wichtig, das im Laboratorium nicht mit derselben Sauberkeit hergestellt werden kann<sup>3)</sup>.

Die Substanzen wurden in Alkohol aufgeschlämmt und auf eine Quarzscheibe von 3 cm Durchmesser und 1 mm Dicke absitzen lassen. Zur Verwendung kam möglichst grobkörniges Pulver, das durch mehrmaliges Aufschlämmen erhalten wurde. Es ergab eine größere Absorption als feinkörniges, bei dem die Verluste des Meßlichtes infolge Streuung zu sehr überwiegen. Bei Senkrechthalten der Scheibe hafteten die Schichten bis über 2 mm Dicke. Diese wurde mit einer Meßuhr ermittelt, wobei auf das Pulver ein Deckglas von 0,1 mm Dicke gelegt wurde.

Als Meßlicht diente einfach spektral zerlegtes Licht einer Wolframwendellampe. Wegen der großen Verluste durch Reflexion und Streuung war eine möglichst hohe Bestrahlungsstärke nötig. Deshalb wurde von der Verwendung eines Doppelmonochromators abgesehen. Aus demselben Grunde mußte die Wolframlampe stark überlastet werden. Die spektrale Spaltbreite betrug im Roten 20  $\mu$  (vgl. Abb. 2—5).

1) P. Lenard, Handb. d. Exp.-Phys. XXIII, S. 690. 1928.

2) Firma Auergesellschaft A.-G., Berlin.

3) N. Riehl, Ann. d. Phys. [5] 29, S. 636. 1937.

Die Scheibe mit dem Pulver wurde unmittelbar vor einem Rotfilter angebracht, hinter dem sich eine Caesiumzelle mit einem Elektrometer in Stromschaltung befand. Das Rotfilter sollte sowohl das erregende Licht wie das Fluoreszenzlicht fernhalten. Spalt, Phosphor und Photozelle waren auf Reitern mit Skaleneinteilung verschiebbar angebracht. Die Empfindlichkeit des Elektrometers betrug bis  $10^{-11}$  Amp./Skt.

Zur Erregung diente das Licht einer Quecksilberhochdrucklampe, das durch einen Monochromator mit Quarzoptik spektral zerlegt wurde. Erregt wurde mit den Linien 366, 405 und 436 m $\mu$ . Die entsprechenden Bestrahlungsstärken  $b$  sind aus Tab. 1 ersichtlich.

Tabelle 1

$\lambda_{m\mu}$	$b$ (Watt/cm <sup>2</sup> )
366	$22,2 \cdot 10^{-4}$
405	$8,3 \cdot 10^{-4}$
436	$11,9 \cdot 10^{-4}$

### § 3. Ausführung der Messungen

Zunächst wurde die durchgelassene Strahlungsleistung  $J_0$  des Meßlichtes für den ausgeleuchteten Phosphor ohne Erregung gemessen. Darnach wurde bei enterdetem Elektrometer gleichzeitig mit dem Meßlicht das erregende Licht auf den Phosphor geworfen. Die Absorption zeigt sich in einer Verkleinerung des Elektrometerausschlages. Stillstand des Fadens entspricht einem stationären Gleichgewichtswert zwischen Anregung und thermischer Rückbildung der angeregten Zustände und ergibt den Ausschlag für  $J$ . Die Absorptionskonstante  $K$  berechnet sich aus der Formel

$$K_d = \frac{1}{d} \ln \frac{J_0}{J} \quad (d = \text{Schichtdicke}).$$

Wegen der undefinierten Schichtdicken von Pulvern kann die Absorptionskonstante nicht absolut bestimmt werden. Die Schichtdicke betrug bei allen Phosphoren etwa 0,9 mm.

Das Rotfilter vor der Caesiumzelle hatte die Aufgabe, das erregende Licht von dieser fernzuhalten. Zugleich diente es dazu, den Anteil des langwelligen Fluoreszenzlichtes möglichst herabzusetzen. Ein noch verbleibender Rest wurde von  $J$  in Abzug gebracht. Es wurden drei verschiedene Rotfilter verwendet, deren Durchlässigkeitsbereich bei  $\lambda > 620$ ,  $> 660$  und  $> 670$  m $\mu$  lag.

Bei Wegnahme des erregenden Lichtes war die thermische Rückbildung der angeregten Zustände an der allmählichen Zunahme des Elektrometerausschlages gut zu verfolgen. Um die Rückkehr in den unerregten Zustand zu beschleunigen, wurde nach jeweiliger Bestimmung des Verhältnisses von  $J_0/J$  der Phosphor mit dem Licht einer Bogenlampe und vorgesetztem Rotfilter ausgeleuchtet.

Die vom Meßlicht erzeugte Bestrahlungsstärke durfte nicht zu groß sein, da sonst bei Erregung des Phosphors gleichzeitig ein Abbau der angeregten Zustände eingetreten wäre. Es wurde daher untersucht, ob sich bei verschiedenen Wellenlängen eine Abhängigkeit der Absorptionskonstante von der Bestrahlungsstärke feststellen ließ. Dies war bis zur höchsten angewandten Leistung von 130 Watt, mit der die Wolframlampe belastet wurde, nicht der Fall. Die vom Meßlicht durchsetzte Fläche betrug  $2,2 \text{ cm}^2$ .

#### § 4. Meßergebnisse

Die Abb. 2—5 zeigen die an den Zinksulfidphosphoren gemessenen Absorptionskurven. Die Ordinate für die Absorptionskurve

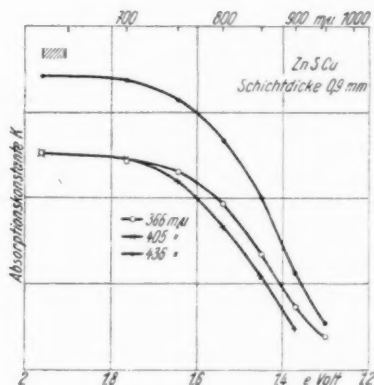


Abb. 2. Absorptionsspektren der angeregten Zustände im ZnSCu-Phosphor bei Erregung mit verschiedenen Wellenlängen

von ZnSAg (Abb. 4 und 5) ist gegenüber der von ZnSCu (Abb. 2) 2fach überhöht und die von ZnS rein (Abb. 3) 3fach. Die Konzentration der angeregten Zustände ist also im ZnSCu-Phosphor am größten. Bei ZnS rein wurde die Nulllinie für die Kurve mit

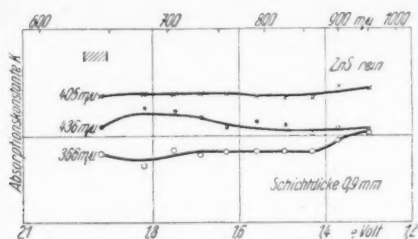


Abb. 3. Absorptionsspektren der angeregten Zustände im ZnS-Phosphor ohne Zusatz bei Erregung mit verschiedenen Wellenlängen

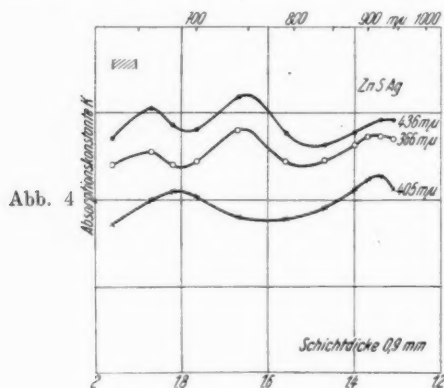


Abb. 4

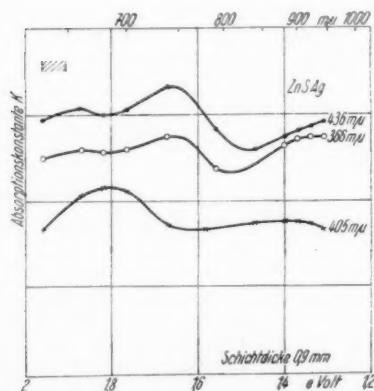


Abb. 5

Abb. 4 und 5. Absorptionsspektren der angeregten Zustände im ZnS-Ag-Phosphor, gemessen an zwei verschiedenen Schichten bei Erregung mit verschiedenen Wellenlängen

366 m $\mu$  Erregung aus Gründen der Übersichtlichkeit um ein Viertel der Ordinateneinheit nach unten verschoben.

Die Absorptionskurve für den ZnSCu-Phosphor (Abb. 2) zeigt keine Selektivitäten und schließt gut an die Lenardsche Messung (Abb. 1) an. Desgleichen zeigt auch die an reinem Zinksulfid ohne Zusatz gemessene Absorptionskurve (Abb. 3) keine nennenswerte Struktur. Hingegen lassen die Absorptionskurven des ZnSag-Phosphors ausgeprägte Maxima erkennen. Außerdem weichen die Absorptionskurven für verschiedene Erregung hier sicher voneinander ab. Es werden die Absorptionskurven für zwei verschiedene Schichten mitgeteilt (Abb. 4 und 5), um zu zeigen, wie weit die Messungen miteinander übereinstimmen. Die Absorptionskurven für 366 und 436 m $\mu$  Erregung zeigen nahezu den gleichen Verlauf. Hingegen weicht die Absorptionskurve für eine Erregung mit der Wellenlänge 405 m $\mu$  stark davon ab. Gemeinsam ist den drei Absorptionskurven nur ein Maximum bei etwa 940 m $\mu$ .

An ZnSMn konnten wegen der starken Emission im sichtbaren und roten Spektralbereich keine Absorptionsmessungen ausgeführt werden.

Zur Prüfung, ob ein Teil des erregenden Lichtes durch Löcher oder irgendwie gestreut zur Photozelle gelangen kann, wurde der Phosphor mit Wellenlängen erregt, die in das Gebiet seiner Eigenabsorption fallen. Gudden und Pohl<sup>1)</sup> haben die Absorptionskante für einen Zinkblendekristall bei 360 m $\mu$  festgestellt. Nach Gisolf<sup>2)</sup> liegt sie für das Grundmaterial bei 335 m $\mu$ . Zwischen Phosphor und Photozelle wurde ein Filter (dickes Tafelglas) gebracht, das für das erregende Licht undurchlässig, für das Fluoreszenzlicht hingegen voll durchlässig war. Zur Messung diente eine Kaliumzelle. Durch die Einschaltung dieser Glasplatte wurde die von der Kaliumphotozelle angezeigte Strahlung nicht mehr geschwächt, als den Reflexionsverlusten an den beiden Grenz-

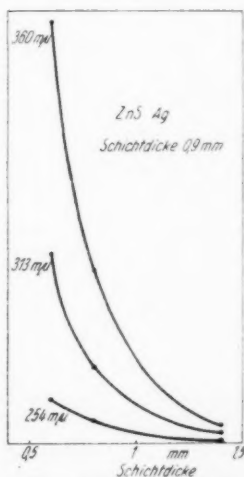


Abb. 6. Strahlungsstärke des auf der Rückseite des Phosphors austretenden Fluoreszenzlichtes

1) B. Gudden u. R. W. Pohl, Ztschr. f. Phys. 17. S. 343. 1923.

2) J. H. Gisolf, Physica 6. S. 84. 1939.

flächen der Glasplatte entsprach. Folglich war die befürchtete Fehlerquelle nicht vorhanden. Es gelangte kein den Phosphor erregendes Licht in die Photozelle. Aus Abb. 6 ist ferner die rasche Abnahme des rückwärts austretenden Fluoreszenzlichtes mit steigender Schichtdicke ersichtlich.

Hielt man den Zinksulfidsilberphosphor in das Spektrum einer Quecksilberlampe, so zeigte er nach Abschaltung des erregenden Lichtes verschiedenfarbiges Nachleuchten. Die von den Linien 366 und 405 m $\mu$  getroffenen Stellen hatten blaues Nachleuchten, während es bei allen anderen grün war. Dieser Befund zeigt, daß durch verschiedenartige Wellenlängen verschiedenartige angeregte Zustände aufgebaut werden.

#### § 5. Kontrolle des Meßverfahrens

Die Übereinstimmung der verschiedenen Absorptionskurven spricht für die Zuverlässigkeit des verwendeten Meßverfahrens. Trotzdem war es erwünscht, entsprechende Messungen an einem Stoff auszuführen, dessen Absorptionsspektrum ebenfalls durch das Licht verändert wird, der dabei aber sowohl als Einkristall wie auch in Pulverform zur Verfügung steht. Zu diesem Zwecke wurde ein KBr-KH-Mischkristall verwendet, von dem die optischen Absorptionsbanden aus Messungen an einwandfreien Einkristallen gut bekannt sind<sup>1)</sup>. Bei diesem entstehen durch Lichtabsorption statt der kurzlebigen angeregten Zustände der Phosphore die thermisch recht stabilen *F*-Zentren.

Ein solcher Kristall wurde fein pulverisiert und durch ein Sieb auf die Quarzscheibe aufgestreut, die vorher mit Benzol benetzt worden war. Nach Verdunstung des Benzols hafteten die Schichten ebenfalls sehr gut. Zur Verfärbung diente das unzerlegte Licht eines Kadmiumfunkens.

Die Meßmethode mußte hierbei etwas geändert werden, da die Rückbildung der *F*-Zentren nur bei hohen Temperaturen erfolgt (über 300°). Es wurden daher zuerst nacheinander die  $J_0$ -Werte für verschiedene Wellenlängen bestimmt. Nach der Bestrahlung konnten dann bei den gleichen Wellenlängen des Meßlichtes die entsprechenden *J*-Werte gemessen werden.

Die Absorptionsmessungen am Kristallpulver stimmen mit den von Einkristallen bekannten gut überein. Beim Kristallpulver tritt lediglich eine Verbreiterung der Halbwertsbreite auf (Abb. 7 und 8).

1) R. Hilsch u. R. W. Pohl, Ann. d. Phys. [5] **32**, S. 155. 1938.



In unserem Falle beträgt diese Zunahme 0,08 eV, das sind 20% der Halbwertsbreite des Einkristalles. Abb. 7 zeigt die Absorptionsbande in einem KBr-Einkristall nach E. Mollwo<sup>1)</sup>. Ob diese Ver-

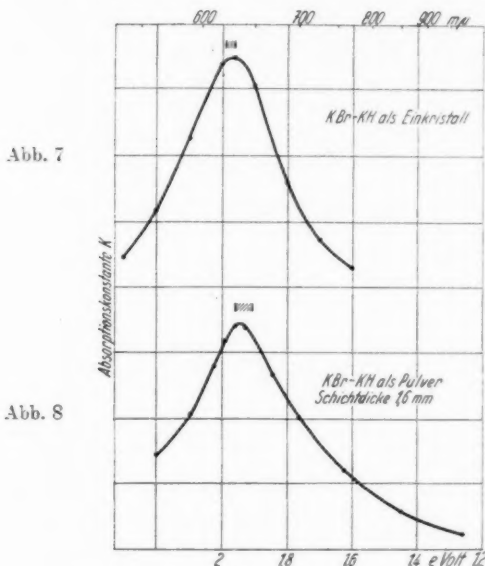


Abb. 7 und 8. Absorptionsspektrum der F-Zentren in einem KBr-KH-Mischkristall.

Abb. 7 gemessen am Einkristall, Abb. 8 gemessen an Kristallpulver

breiterung der Absorptionsbande auf dem Meßverfahren oder einer Beeinflussung der Farbzentren durch das Pulverisieren beruht, muß noch dahingestellt bleiben.

#### § 6. Zusammenfassung

1. Es werden die Absorptionsspektren der angeregten Zustände von Zinksulfidphosphoren gemessen, und zwar von Zinksulfid ohne Zusatz, sowie Zinksulfid mit Silber und Kupferzusatz. Die Spektren werden in den Abb. 2—5 dargestellt.

2. Die Erregung erfolgte monochromatisch. Beim Zinksulfid-silberphosphor traten hierbei mehrere getrennte Banden in Erscheinung, deren Lage für verschiedene erregende Wellenlängen nicht die gleiche war (Abb. 4 und 5).

<sup>1)</sup> E. Mollwo, Ztschr. f. Phys. 85. S. 56. 1933.

3. Das Meßverfahren wurde an einem KBr-KH-Mischkristall kontrolliert, bei dem die vom Licht geschaffene Absorption sowohl am Einkristall wie am Kristallpulver gemessen werden konnte.

Herrn Prof. Pohl danke ich herzlichst für die Anregung zu dieser Arbeit und das dauernde Interesse bei ihrer Ausführung. Ferner fühle ich mich den Herren Dr. Mollwo und Dr. Pick zu Dank verpflichtet für wertvolle Ratschläge und Diskussionen. Herrn Dir. Dr. Riehl und der Firma Auergesellschaft A.-G., Berlin, danke ich für die freundliche Überlassung der Substanzen.

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 15. September 1940)

F L

den  
ener  
der  
una  
wün  
Beh  
steh

La  
und  
eine

flekt  
(Abt  
wäh

tung

S. 10  
114.

# **Energetische Betrachtungen zum Schallstrahlungsdruck**

**Von Fritz Bopp**

(Mit 2 Abbildungen)

§ 1. Im Anschluß an die kürzlich erfolgte Diskussion<sup>1)</sup> über den Schallstrahlungsdruck wollen wir einige Betrachtungen auf energetischer Grundlage durchführen, die von der genauen Kenntnis der Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen weitgehend unabhängig sind. Eine solche Untersuchung erscheint besonders wünschenswert im Hinblick auf die unvollkommene mathematische Beherrschung der Dynamik des Problems vor allem im Falle stehender Wellen.

Es mögen im folgenden die beiden nach Lord Rayleigh<sup>2)</sup> und Langevin<sup>3)</sup> benannten Fälle behandelt werden, die durch die Abb. 1 und 2 gekennzeichnet sind. Von dem schwingenden Kolben *K* gehe eine Schallwelle aus, die am gegenüberliegenden Schirm *S* so re-

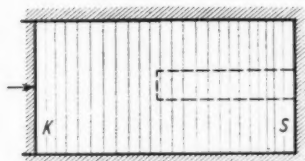


Abb. 1. Fall A



Abb. 2. Fall B

flektiert werde, daß sich eine stehende Welle bilde. Im Falle A (Abb. 1) sei das Schallfeld vollkommen vom Außenraum abgeschlossen, während es im Falle B (Abb. 2) mit diesem in Verbindung stehe.

Schließen wir uns der üblichen eindimensionalen Betrachtung an, die wir später rechtfertigen werden, so folgt zunächst

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. [5] **35**, S. 473. 1939; Ztschr. f. Phys. **115**, S. 109. 1940 (als Diskussionsbericht); G. Hertz u. H. Mende, Ztschr. f. Phys. **114**, S. 354. 1939; G. Richter, Ztschr. f. Phys. **115**, S. 97. 1940.

2) Lord Rayleigh, Papers V S. 41ff. 1902.

3) M. P. Langevin, Rev. d'Acoustique **1**, S. 93. 1932; **2**, S. 315. 1933.

aus der hydrodynamischen Grundgleichung und der Kontinuitätsgleichung

$$(1) \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \dot{v} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dot{\rho} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0,$$

wenn wir die zweite mit dem Faktor  $v$  erweitern und zur ersten addieren:

$$(2) \quad -\frac{\partial}{\partial x} (p - p_0) = \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x} = \frac{\partial \rho v}{\partial t} + 2 \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Darin bedeutet  $p v^2 = 2T$  die doppelte Dichte der kinetischen Energie und  $p_0$  den konstanten Druck vor der Störung durch das Schallfeld, der im Falle  $B$  mit dem Druck im Außenraum übereinstimmt. Im Zeitmittel, das wir durch einfaches Überstreichen kennzeichnen, folgt aus Gl. (2)

$$-\frac{d}{dx} (\overline{p - p_0}) = 2 \frac{d \bar{T}}{dx}$$

oder nach Integration über  $x$

$$(3) \quad (\overline{p - p_0}) = C - 2 \bar{T}.$$

Gl. (3) gibt die Änderung des Schallstrahlungsdrucks in Richtung der Wellennormalen an. Die Integrationskonstante  $C$  ist gleich seinem Wert auf dem Schirm  $S$ :

$$(4) \quad (\overline{p - p_0})_S = C,$$

da  $\bar{T}$  mit  $v$  auf  $S$  verschwindet.

Im Falle  $B$  läßt sich die Integrationskonstante leicht bestimmen. Eine an Gl. (3) anschließende räumliche Mittlung, also eine Mittlung über  $x$ , die durch einen zweiten Querstrich gekennzeichnet sei, liefert

$$(5) \quad (\overline{p - p_0}) = (\overline{p - p_0})_S - 2 \bar{T}$$

als Beziehung zwischen dem Schallstrahlungsdruck  $(\overline{p - p_0})_S$  auf dem Schirm  $S$  und dem Mittelwert  $\overline{p - p_0}$ , der offenbar den mittleren seitlichen Druck angibt. Im Falle  $B$  muß dieser verschwinden, da ein mittlerer Druckunterschied zu einem einseitig fließenden Strom aus dem Schallfeld heraus oder in dieses hinein führt. In diesem Fall ist also auf dem Schirm  $S$

$$(6) \quad (\overline{p - p_0})_S = 2 \bar{T} = E + (\bar{T} - V),$$

wenn wir die Dichte der potentiellen Energie des Schallfelds mit  $V$  und die der Gesamtenergie mit  $E = T + V$  bezeichnen. Bei kleinen Schwingungen, für die  $T \approx V$  ist, stimmt das mit dem Langevin'schen Ergebnis überein. Irgendwo im Innern des Schallfelds ist

$$(7) \quad (\overline{p - p_0}) = 2 (T - V).$$

Im Falle *A* kann der Zylindermantel den seitlichen Druck aufnehmen. In diesem Falle ist die Bestimmung der Integrationskonstante nicht so einfach.

Die analoge dreidimensionale Betrachtung, die vor allem dem Fall *B* mehr angemessen ist, verläuft formal anders, führt aber zu demselben Ergebnis. Aus den Gleichungen

$$(8) \quad -\operatorname{grad} p = \varrho \dot{\mathbf{v}} + \varrho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}, \quad \dot{\varrho} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0$$

folgt ähnlich wie beim Übergang von Gl. (1) zu Gl. (2)

$$(9) \quad -\frac{\partial}{\partial k}(p - p_0) = \frac{\partial \varrho v_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(\varrho v_k v_l).$$

Darin steht *k* und *l* für *x*, *y* und *z*. Über den paarweise auftretenden Index *l* ist zu summieren. Im Zeitmittel folgt daraus

$$(10) \quad \frac{\partial \Pi_{kl}}{\partial l} = 0, \quad \Pi_{kl} = \overline{\varrho v_k v_l} + (\overline{p} - p_0) \delta_{kl}$$

und das Verschwinden des Integrals

$$(11) \quad \int \Pi_{kl} df_l = 0, \quad \int (\overline{p} - p_0) d\mathbf{i} + \int \overline{\varrho \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{i})} = 0$$

über irgendeine geschlossene Fläche. Legen wir diese als Zylinderfläche in der in Abb. 1 und 2 gestrichelt eingezeichneten Weise in das Schallfeld, so ergibt sich in beiden Fällen, wenn wir den Integrationszylinder so schmal wählen, daß der Einfluß der seitlichen Wände im Falle *A* und der des Streufelds im Falle *B* nicht mehr merklich ist, wenn also  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$  gesetzt werden kann:

$$(12) \quad (\overline{p} - p_0)_S - (\overline{p} - p_0) = \overline{\varrho v^2} = 2\bar{T}.$$

Die Werte von  $(\overline{p} - p_0)$  und  $\bar{T}$  beziehen sich auf die linke Grundfläche des Integrationszylinders. Das Ergebnis stimmt mit dem früheren in den Gl. (3) und (4) genau überein. Nunmehr lassen sich jedoch die Grenzen der Gültigkeit der obigen Formeln ermeszen.

§ 2. Zur Bestimmung der Integrationskonstante *C* in Gl. (3) betrachten wir die kanonische Zustandsgleichung für den adiabatischen Fall. Sie lautet, wenn wir die auf die Masseneinheit bezogene innere Energie mit *U* bezeichnen:

$$(13) \quad dU = -p d\frac{1}{\varrho} = -d\frac{p}{\varrho} + \frac{dp}{\varrho}.$$

Die Integration von einem ungestörten zu einem beliebigen Zustand im Schallfeld liefert, wenn wir den ungestörten Zustand als Nullpunkt der Energie wählen:

$$(13') \quad U + \left(\frac{p}{\varrho} - \frac{p_0}{\varrho_0}\right) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\varrho} = F(p).$$

Nach einfacher Umformung und zeitlicher Mittlung folgt daraus

$$(14) \quad \overline{p - p_0} = -\overline{\varrho U} + \overline{\varrho F} + \frac{p_0}{\varrho_0} (\overline{\varrho - \varrho_0}).$$

Die anschließende räumliche Mittlung ergibt

$$(15) \quad \overline{\overline{p - p_0}} = -\overline{\varrho U} + \overline{\varrho F} + \frac{p_0}{\varrho_0} (\overline{\varrho - \varrho_0}).$$

Gl. (5) führt danach zu folgender grundlegenden Beziehung

$$(16) \quad (\overline{p - p_0})_s = 2\overline{T} - \overline{\varrho U} + \overline{\varrho F} + \frac{p_0}{\varrho_0} (\overline{\varrho - \varrho_0})$$

für den Schallstrahlungsdruck auf dem Schirm  $S$ .

Für jede bestimmte Zustandsgleichung läßt sich  $\overline{\varrho F}$  leicht ausrechnen. Bei idealen Gasen ist in dem angenommenen adiabatischen Fall

$$(17) \quad p = p_0 \left( \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\kappa.$$

Daraus folgt

$$(18) \quad F = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left( \frac{p}{\varrho} - \frac{p_0}{\varrho_0} \right)$$

und

$$\overline{\varrho F} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left\{ (\overline{p - p_0}) - \frac{p_0}{\varrho_0} (\overline{\varrho - \varrho_0}) \right\}.$$

In Verbindung mit Gl. (15) ergibt sich also

$$(19) \quad \overline{\varrho F} = \kappa \overline{\varrho U},$$

so daß Gl. (16) folgende Form annimmt:

$$(20) \quad (\overline{p - p_0})_s = 2\overline{T} + (\kappa - 1) \overline{\varrho U} + \frac{p_0}{\varrho_0} (\overline{\varrho - \varrho_0}).$$

In dem Rayleighschen Falle  $A$  bleibt die Masse im Schallfeld erhalten. Die Dichte  $V$  der potentiellen Energie des Schallfelds stimmt in diesem Fall mit der Gesamtänderung der Dichte der potentiellen Energie überein. Es ist also

$$(21) \quad \overline{\varrho - \varrho_0} = 0, \quad \overline{\varrho U} = \overline{V},$$

und der Schallstrahlungsdruck beträgt nach Gl. (20) im

$$(22) \quad \text{Fall } A: (\overline{p - p_0})_s = 2\overline{T} + (\kappa - 1) \overline{V} = \frac{\kappa + 1}{2} \overline{E} + \frac{3 - \kappa}{2} (\overline{T} - \overline{V}).$$

Für kleine Schwingungen erhält man danach die Rayleighsche Formel. Für den seitlichen Druck folgt aus Gl. (5)

$$(23) \quad (\overline{p - p_0}) = (\kappa - 1) \overline{V} = \frac{\kappa - 1}{2} \overline{E} - \frac{\kappa - 1}{2} (\overline{T} - \overline{V}).$$

Wenn man im Falle *A* den Zylindermantel wegnimmt, herrscht im Schallfeld ein Überdruck gegenüber dem Außenraum. Es wird also ein Strom nach außen fließen bis das Druckgleichgewicht hergestellt ist. In diesem Fall ergibt sich genau wie in § 1 die Langevinsche Formel:

$$(6) \quad \text{Fall B: } (\overline{p} - p_0)s = 2T = E + (T - \overline{V}).$$

Darüber hinaus erhält man aus den Gl. (6) und (20) für die Änderung der mittleren Dichte im Innern des Schallfelds die Beziehung

$$(24) \quad \frac{\overline{\varrho} - \varrho_0}{\varrho_0} = -(\kappa - 1) \frac{\overline{\varrho} U}{p_0}.$$

Aber jetzt stimmt  $\overline{\varrho} U$  nicht mehr mit der mittleren potentiellen Schallfeldenergie  $\overline{V}$  überein. Ein bestimmter, und zwar negativer Beitrag rührt von der Änderung der mittleren Dichte her. Sei diese  $\varrho_m = \overline{\varrho}$ , und bezeichnen wir die zugehörigen Werte von Druck und Energie mit  $p_m = p(\varrho_m)$  und  $U_m$ , so folgt

$$(25) \quad \overline{V} = \overline{\varrho}(U - U_m).$$

Da nach den Gl. (13') und (18)

$$U_m = -\left(\frac{p_m}{\varrho_m} - \frac{p_0}{\varrho_0}\right) + F(p_m) = +\frac{1}{(\kappa - 1)}\left(\frac{p_m}{\varrho_m} - \frac{p_0}{\varrho_0}\right)$$

ist, ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für die Dichteänderung

$$(26) \quad \frac{\overline{\varrho} - \varrho_0}{\varrho_0} + \left(\frac{\frac{p_m}{\varrho_m}}{\frac{p_0}{\varrho_0}} - 1\right) = -(\kappa - 1) \frac{\overline{V}}{p_0}.$$

In erster Näherung kann man dafür schreiben

$$(27) \quad \frac{\overline{\varrho} - \varrho_0}{\varrho_0} \approx -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\overline{V}}{p_0}.$$

In gleicher Näherung folgt daraus außerdem

$$(28) \quad \overline{\varrho} U \approx \frac{1}{\kappa} \overline{V}.$$

#### Zusammenfassung

Der Schallstrahlungsdruck ist in den beiden von Lord Rayleigh und Langevin behandelten Fällen auf energetischer Grundlage berechnet worden. Im Falle kleiner Schwingungen stimmt das Ergebnis mit den Formeln der beiden Autoren überein. Die obigen Formeln gelten jedoch streng. Sie setzen nicht einmal die Beschränkung auf Potentialströmung voraus. Abweichungen sind

höchstens beim Auftreten von Unstetigkeitsflächen und infolge innerer Reibung zu erwarten.

Die Rechnungen beziehen sich auf adiabatische Schwingungsvorgänge und sind beispielsweise nur für das ideale Gas im einzelnen durchgeführt worden<sup>1)</sup>. Die Anwendung auf andere Zustandsgleichungen ist im Anschluß an die allgemeine Gl. (16) leicht möglich. Im isothermen Fall tritt an die Stelle der inneren die freie Energie, und die adiabatische Zustandsgleichung ist durch die thermische zu ersetzen. Im Falle des idealen Gases ist also  $\alpha = 1$ , so daß der Unterschied zwischen den Ergebnissen für die Fälle *A* und *B* verschwindet. Bei allen Vorgängen, die zwischen dem adiabatischen und isothermen Grenzfall liegen, muß man den Wärmefluß berücksichtigen.

1) Vgl. dazu auch M. L. Brillouin, Ann. de phys. [10] 4. S. 528. 1925.

Breslau, Institut für theoretische Physik der Universität, am 13. August 1940.

(Eingegangen 16. August 1940)



